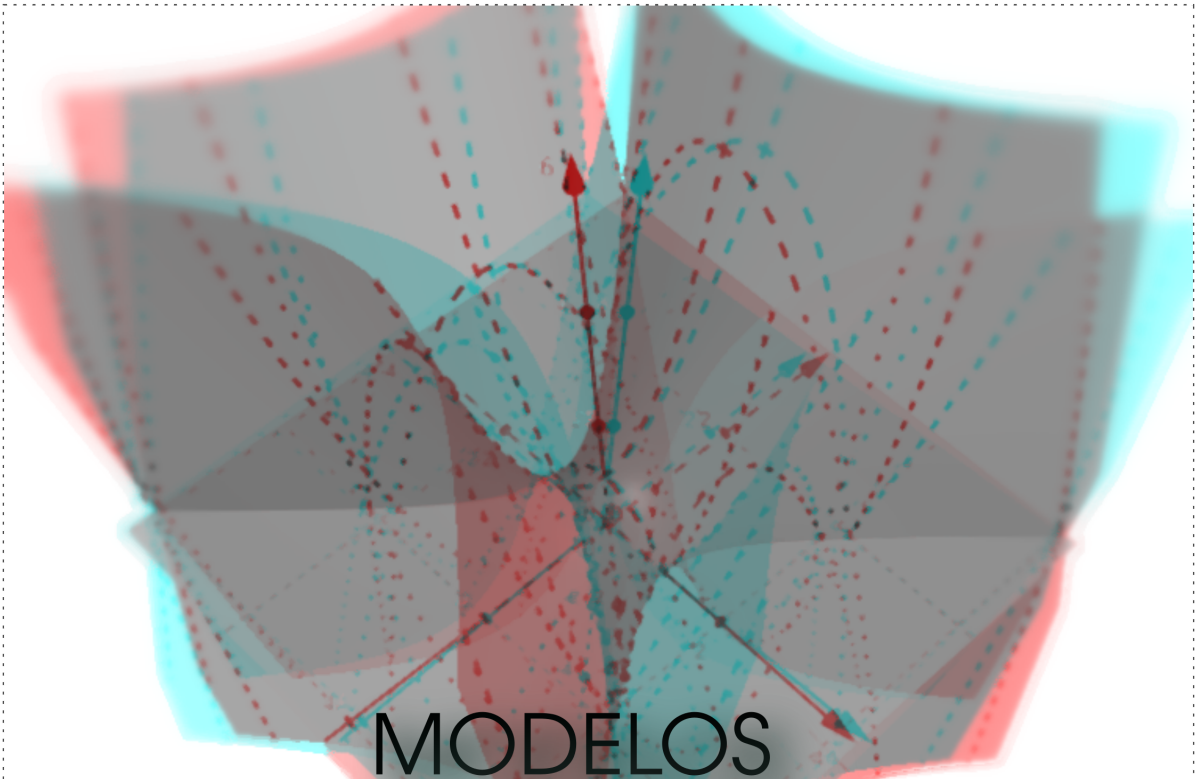


MODELOS DIDÁCTICOS

PARA TRABAJAR EN LA CLASE DE

MATEMÁTICA CON GEOGEBRA

"De la teoría a la práctica: Una colección de modelos de clases con GeoGebra inspirados en la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau"

Profesor Federico Javier Gazaba

Segunda versión

Modelos didácticos para trabajar en la clase de matemática con *GeoGebra*

Profesor Federico Javier Gazaba

17 de mayo de 2026

Resumen

«De la teoría a la práctica: Una colección de modelos de clases con GeoGebra inspirados en la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau»

La presente obra -gratuita, libre y sin fines de lucro- es básicamente una colección de modelos de clases de matemática donde se utiliza el software GeoGebra en la resolución de problemas y la enseñanza de la matemática. La elección de *GeoGebra* como herramienta didáctica en la clase de Matemática no es casual sino que tiene su fundamento, su desarrollo conserva el espíritu colaborativo donde participan personas de todo el mundo: informáticos, programadores, docentes y entusiastas que aman la matemática y su enseñanza.

Agradecimientos

A mis hermanas *Guillermina* y *Luciana*, quienes han sido siempre un faro en mi vida tanto desde lo afectivo como en lo académico.

Dedicación

A mis *hijas Charo* y *Emma*, quienes hoy son muy pequeñas para comprender el contenido de este libro pero que espero, con paciencia y esperanza, que algún día les sea de utilidad.

Sobre el autor

Federico Javier Gazaba es profesor de Matemática, egresado del *Instituto de Formación Docente y Técnica N°122 «Pte. Arturo Illia»* de la Ciudad de Pergamino, Buenos Aires, Argentina. Allí desempeña su labor docente en la cátedra de «Didáctica de la Matemática», donde ha integrado el uso de herramientas tecnológicas para enriquecer la experiencia de aprendizaje.

Este libro, «Modelos didácticos para trabajar en la clase de matemática con GeoGebra», es su primer trabajo publicado sobre el tema, aunque desde hace más de 10 años comparte artículos relacionados en su blog personal ((4.2.2)). Además, Federico es un ferviente defensor de la *Cultura Libre*, participando activamente en proyectos *Open Source* de geomática y educación.

En esta obra, presenta una colección de modelos de clases de matemática que emplean el software *GeoGebra*, con el objetivo de acercar la teoría a la práctica, enmarcados en la *Teoría de Situaciones Didácticas* de *Guy Brousseau*.

> «Si tú tienes una manzana y yo tengo una manzana y las intercambiamos, entonces ambos aún tendremos una manzana. Pero si tú tienes una idea y yo tengo una idea y las intercambiamos, entonces ambos tendremos dos ideas.» *Bernard Shaw.*

Licencia de uso

El documento fue producido con la idea de que pueda reutilizarse, adaptarse y compartirse libremente, siempre y cuando se comparta con igual licencia y citando la autoría original. De ninguna manera este libro persigue fines comerciales, sin embargo usted puede utilizarlo y adaptarlo para tal fin siempre y cuando respete las licencias de uso de *GeoGebra*, descritas más abajo (Acerca de *GeoGebra*).

Figura 1: Licencia: Creative Commons.

Versión

2.0

Registro de cambios

En esta segunda versión se han modificado algunos modelos didácticos ya publicados y se han agregado varias secuencias inéditas. Asimismo se han reformulado algunos gráficos de anteriores problemas mejorando su calidad e interpretación, haciendo provecho de las nuevas tecnologías de Inteligencia Artificial para generar dibujos ilustrativos.

Nota: Este libro -como su versión original- fue pensado, escrito, diseñado y maquetado por una sola persona. Si usted encuentra algún error, no dude en contactar al autor para que pueda resolverlo en las próximas ediciones. Así también, si desea aportar alguna sugerencia o comentario técnico y/o didáctico.

Acerca de *GeoGebra*

GeoGebra (235) es un software multiplataforma de matemáticas dinámicas para todas las áreas de las matemáticas escolares. Su licencia indica que «Usted es libre de copiar, distribuir y transmitir *GeoGebra* para fines no comerciales» (ver licencia).

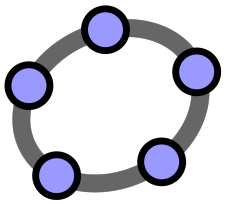


Figura 2: Imagen: Wikipedia

Índice general

1. Números y operaciones **9**
1.1. Operaciones . . . 9
1.1.1. Sumas y restas de naturales . . . 9
1.2. Múltiplos y divisores . . . 14
1.2.1. Factores y factores primos . . . 14
1.2.2. Mínimo Común Múltiplo . . . 17
1.3. Proporcionalidad . . . 23
1.3.1. Regla de tres simple inversa . . . 23

2. Álgebra y funciones **29**
2.1. Expresiones algebraicas y ecuaciones . . . 29
2.1.1. Introducción a las expresiones algebraicas . . . 29
2.1.2. Cuadrado de un Binomio . . . 38
2.1.3. Sistemas de Ecuaciones . . . 43
2.2. Funciones . . . 50
2.2.1. Ejes cartesianos . . . 50
2.2.2. Introducción a las funciones . . . 53
2.2.3. Análisis gráfico de funciones . . . 59
2.2.4. Función cuadrática . . . 68
2.2.5. Funciones de proporcionalidad inversa . . . 77
2.2.6. Funciones exponenciales . . . 84
2.2.7. Funciones trigonométricas . . . 90
2.2.8. Función valor absoluto . . . 103
2.3. Cálculo . . . 109
2.3.1. Mínimos con derivada primera . . . 109
2.3.2. Integrales . . . 117
2.4. Geometría analítica . . . 132
2.4.1. La recta en el plano cartesiano . . . 132
2.4.2. Sistemas de inecuaciones lineales . . . 139
2.5. Matrices . . . 145
2.5.1. Introducción a las matrices y sus operaciones . . . 145
2.5.2. Grafos y matrices de adyacencia . . . 151

3. Geometría y magnitudes **158**
3.1. Figuras planas . . . 158
3.1.1. Construcción de triángulos . . . 158
3.1.2. Áreas de cuadriláteros . . . 167
3.1.3. Área versus perímetro . . . 174
3.1.4. Teorema de Pitágoras . . . 179
3.1.5. Transformaciones de figuras . . . 185
3.1.6. Teorema de Thales . . . 196
3.2. Vectores . . . 207
3.2.1. Suma de vectores . . . 207
3.3. Trigonometría . . . 213
3.3.1. Razones trigonométricas . . . 213

4. Probabilidad y estadística **220**
4.1. Estadística 220
4.1.1. Estadística descriptiva 220
4.2. Probabilidad 226
4.2.1. Probabilidad simple 226
4.2.2. Introducción al conteo 232

Introducción

Metodología

Mi experiencia como profesor de Didáctica de la Matemática y su Enseñanza en el Nivel Superior me ha permitido recopilar formidables experiencias áulicas. Entiendo que estas deben ser compartidas para servir de guía a otros profesionales. Realizo este compendio de situaciones-modelo, a modo de bitácora y sin ánimo de lucro, para ejemplificar la elaboración de clases de matemática basadas en la resolución de problemas con GeoGebra, utilizando una interpretación de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau. Es, entonces, un libro *para docentes de matemáticas y estudiantes del profesorado de matemática*s.

Es importante aclarar que este documento no es un manual sobre cómo utilizar GeoGebra, ya que existen tutoriales de uso en toda la red, ni tampoco un libro sobre los fundamentos teóricos profundos de la didáctica de la matemática. En cambio, ofrece una mirada práctica para la escuela secundaria, enfocada en cómo GeoGebra puede ser utilizado por docentes y estudiantes en el marco de la didáctica de la resolución de problemas.. El aspecto más innovador de esta colección es que cada actividad se propone específicamente como disparador para un contenido matemático, utilizando el planteo de una situación-problema y GeoGebra en su resolución.

Todos los problemas presentes en este libro presentan el siguiente esquema didáctico:

Planteo Ante todo el problema tiene que funcionar como un disparador de la temática matemática que se quiere trabajar y no necesariamente se debe anunciar esto antes de comenzar. Por ejemplo, si se plantea un problema que luego motivará el desarrollo de la «semejanza de triángulos», no es necesario que se anticipe ese título al alumnado. El problema debe verificar que no sea demasiado fácil de resolver como tampoco imposible de solucionar. Puede ser un problema externo a la matemática -real o realista- o bien interno a la misma.

Resolución La Resolución de Problemas deberá ser supervisada por el docente, quien estará pendiente en todo momento de los 4 pasos (de *George Polya*). Podrá tener una etapa individual donde el alumno descubra los datos y esboce alguna estrategia de resolución y luego una etapa grupal, en donde podrá validar con sus compañeros sus ideas y argumentaciones. Es necesario entender que no todos los alumnos podrán resolver el problema, y por esto quizás sea conveniente armar grupos con alumnos que estén más avanzados que otros.

Validación En esta etapa todo el grupo de alumnos deberá debatir sobre las soluciones propuestas, y el docente será un guía para que suceda. Las resoluciones deberán argumentarse, relacionando contenidos previos. También deberá plantearse aquellas estrategias que no resultaron, y por qué sucedió así.

Formalización En la resolución debe quedar de manifiesto que es posible «construir nuevas matemáticas» para resolver el problema, o que al menos permitan facilitar su resolución. Esta es la intervención donde el docente institucionaliza el contenido a desarrollar, ahora si, desde la teoría.

Modelo didáctico

La elección de este modelo didáctico no es casual; responde directamente a las investigaciones de la Didáctica Matemática proveniente de la escuela francesa, iniciada por Guy Brousseau y ampliada por autores como Yves Chevallard y Gérard Vergnaud, entre otros. Aunque en esta obra no se profundizará en los conceptos y definiciones de estos desarrollos teóricos, nos centraremos en la práctica de clase, abordando las intervenciones del docente y las posibles actuaciones de los alumnos.

Para el lector no familiarizado con estas corrientes, es importante saber que las situaciones-problema se abordan de forma invertida a una clase normativa, buscando la construcción significativa del conocimiento desde la tríada alumno-problema-maestro. En este enfoque, se presenta una problemática que debe poseer el

suficiente grado de dificultad para que el alumno se apropie de su resolución. Por lo tanto, el problema debe ser un obstáculo *posible de resolver* (en palabras del propio *Brousseau*), sin ofrecer una solución inmediata ni ser imposible para el nivel del alumnado.

Durante el proceso de resolución y validación, el rol del docente es el de guía, limitándose a realizar intervenciones mínimas para que los alumnos puedan razonar y validar sus propias estrategias. El maestro evita validar como autoridad en la argumentación, optando por preguntar e indagar sobre las afirmaciones de los estudiantes. En estas etapas, la tarea docente exige una fuerte componente de observación, buscando conectar las ideas de los alumnos, contraponer argumentaciones y fomentar el debate. Finalmente, la etapa de formalización es responsabilidad del docente, quien institucionaliza el contenido a desarrollar, ahora sí, desde la teoría. Esto se debe a que el conocimiento formal corresponde a un saber cultural que requiere de la responsabilidad del maestro para ser nombrado y definido.

Posteriormente la clase puede continuar de muchas maneras, como por ejemplo nuevas *situaciones-problema*, problemas de aplicación, juegos, ejercitaciones, etc., dependiendo de cuál crea el docente que sea el camino a seguir.

Es necesario manifestar, para quienes estén familiarizados con la *Teoría de las Situaciones Didácticas* de *Brousseau*, que la estructura del modelo de resolución que se repite en cada actividad presenta una similitud con las fases o situaciones de *Acción, Formulación, Validación e Institucionalización*, pero que sin embargo no son las mismas: es claramente una adaptación. Esta configuración responde a varios factores, como la experiencia del autor en el aula con estudiantes de secundaria y del *Profesorado de Matemática*, donde la implementación del modelo decantó casi naturalmente en esta configuración. Además, esta estructura práctica está diseñada para canalizar y promover el uso de ciertas herramientas de *GeoGebra* que son esenciales para descubrir o construir los conceptos matemáticos objetivos de cada actividad

Software

En todo momento, se trabajará con la versión «Clásica» de *GeoGebra*, disponible en linea o para descarga (iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook). Para instalarlo en Linux recomiendo este repositorio preparado por el proyecto Huayra Linux.

De igual forma, todos las *situaciones-problema* trabajadas en este libro pueden adaptarse para su trabajo con otro software o, por qué no, de forma tradicional en papel.

Contenidos

La colección se divide en cuatro grandes *secciones* o *ejes temáticos* de contenidos, de forma similar a los que propone el *Diseño Curricular de Matemática para la secundaria de la Provincia de Buenos Aires*[1]:

- Números y operaciones
- Geometría y magnitudes
- Álgebra y funciones
- Probabilidad y estadística

A su vez, dentro de ellos se propondrán *bloques, sub-secciones o núcleos de contenidos* relacionados entre sí con la idea de organizar mejor la búsqueda de modelos de clase. Algunas actividades tendrán interconexión entre ejes, sin embargo se encontrarán clasificadas en el que mejor describe su objetivo didáctico.

En cada modelo se describirán algunas características propias que servirán al lector para entender a dónde apunta la actividad planteada, como el objetivo didáctico, los saberes de base y la edad recomendada.

Obras derivadas y recursos

Todo este material nace desde la necesidad de contar con modelos didácticos donde se pueda trabajar con GeoGebra en clase, y lo cierto es que no hay tanta literatura al respecto. El lector debe sentirse libre de utilizar, adaptar y reformular estos modelos a gusto, sin pedir permiso pero con la salvedad de citar la fuente (3).

También se promueve la búsqueda de recursos «sueltos» en el propio repositorio de GeoGebra (235). Allí la comunidad de usuarios en distintos idiomas es inmensa.

Por último, ante cualquier sugerencia o comentario respecto del libro dirigirse a mail.

[1] Ver los DC de la Provincia de Buenos aires los Diseños Curriculares de la Escuela Secundaria para Matemática 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (235).

Modelo de actividad

Todas las actividades que encontraremos en este documento tendrán la siguiente estructura, donde se describe de forma breve las distintas componentes para que sean fácilmente identificables.

Núcleo de contenido

Contenido

Nombre: Nombre de fantasía de la actividad, generalmente relacionada con la situación-problema.

Resumen: Descripción breve de la actividad.

Objetivo: Refiere a lo que se pretende alcanzar, desde el punto de vista didáctico. Es lo que se pretende que los alumnos aprendan o afiancen.

Saberes: Describe qué saberes previos son necesarios tener para poder resolver con la actividad.

Edad: Definido como X a Y años, es el rango de edades sugeridas. Van desde los 12 años a los 18 años.

Preparación: Texto con acciones, recomendaciones y sugerencias preparatorias para el docente.

Planteo

Planteamiento del problema o situación-problema.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: Descripción del problema, sus datos e interrogantes. Se debe reconocer desde donde se parte y a dónde se quiere llegar.
2. *Pensar una estrategia*: Planes o estrategias supuestas por el alumnado. A veces pueden ser múltiples y no siempre pueden ser efectivas.
3. *Ejecutar el plan:* Resolución del problema.
4. *Verificar y repensar la solución.* Verificación de las respuestas obtenidas mediante las diferentes estrategias planteadas.

Validación

Argumentación y validación de lo resuelto.

Formalización

Formalización e institucionalización de los contenidos desarrollados.

Capítulo 1

Números y operaciones

1.1. Operaciones

1.1.1. Sumas y restas de naturales

Nombre: Sumas y restas en la recta numérica.

Resumen: Esta sencilla actividad propone un juego de sumas y restas en la recta numérica utilizando GeoGebra. Su propósito es asociar las operaciones abstractas de adición y sustracción con su representación gráfica, facilitando la comprensión del proceso. Aunque la secuencia didáctica excede las competencias mínimas para la escuela secundaria, resulta un ejercicio valioso para repensar las operaciones básicas desde otra perspectiva.

Objetivo: Repensar las operaciones aritméticas desde el soporte de la recta numérica.

Saberes: Sumas con números Naturales.

Edad: 11 años.

Preparación: El problema necesita de conexión a internet, en principio para poder cargar el archivo que permite jugar con los números aleatorios. Se sugiere que el docente «juegue» varias veces antes de plantear esta actividad en clase para entender qué posibilidades numéricas se le presenta -siendo que es un problema con respuestas múltiples- permitiéndole anticiparse a las posibles respuestas de sus alumnos.
El planteo sugiere, al inicio, la resolución individual de cada condición, sin embargo también podrá disponer a los alumnos en grupos con una computadora. En tal caso las respuestas serán acordadas por el grupo.
Por último, si bien se trata de una actividad simple que plantea jugar desde lo aritmético puede ser posible introducir en algún momento la noción de variable para describir las posibles medidas de los segmentos verde y magenta. Quizás pueda plantearse a continuación de este secuencia alguna actividad donde sea posible introducir el pensamiento algebraico.

Planteo

Abre el archivo «Operaciones con la recta numérica». Verás allí dos segmentos «pegados», uno verde y otro magenta con la etiqueta de longitud de cada uno de ellos. Los vértices de los segmentos son móviles que se desplazan libremente por la recta.

El juego consiste en lograr que los dos segmentos sumen la longitud del número aleatorio que se obtiene a partir de presionar el botón «Obtiene el número!», respetando en cada jugada las siguientes condiciones, presionando el botón cada vez:

1. *El segmento verde tiene que medir* 1 *unidad.*
2. *El segmento magenta tiene que medir* 1 *unidad.*
3. *El segmento verde tiene que ser una unidad más largo que el magenta.*
4. *Los dos segmentos tienen que tener igual longitud.*

5. *El segmento verde debe ser par y el segmento magenta impar.*
6. *Los dos segmentos deben ser impares.*
7. *El segmento magenta debe ser el doble del segmento verde.*
8. *El segmento verde debe medir* 10 *unidades.*

Tras cada jugada, anota las longitudes como una suma. Si no logras el objetivo, debes indicar la razón antes de proseguir con la siguiente jugada.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El juego tiene reglas simples y se compite contra uno mismo. En cada jugada hay que presionar el botón que nos dará un número aleatorio, luego habrá que cumplir con la condición de cada jugada, anotando a la vez la cuenta correspondiente. Si no se puede resolver, entonces se anotará el por qué no pudimos.
2. *Pensar una estrategia*: Al pensar el problema nos damos cuenta que el juego depende del azar y que algunas condiciones son muy fáciles de cumplir y otras resultarán más difíciles e incluso podrían ser imposibles. También observamos que, dependiendo del número obtenido, es posible resolver de varias formas la jugada.
3. *Ejecutar el plan:* Mostraremos algunos casos a modo de ejemplo de resolución:
   Jugada 1: *El segmento verde tiene que medir* 1 *unidad.*

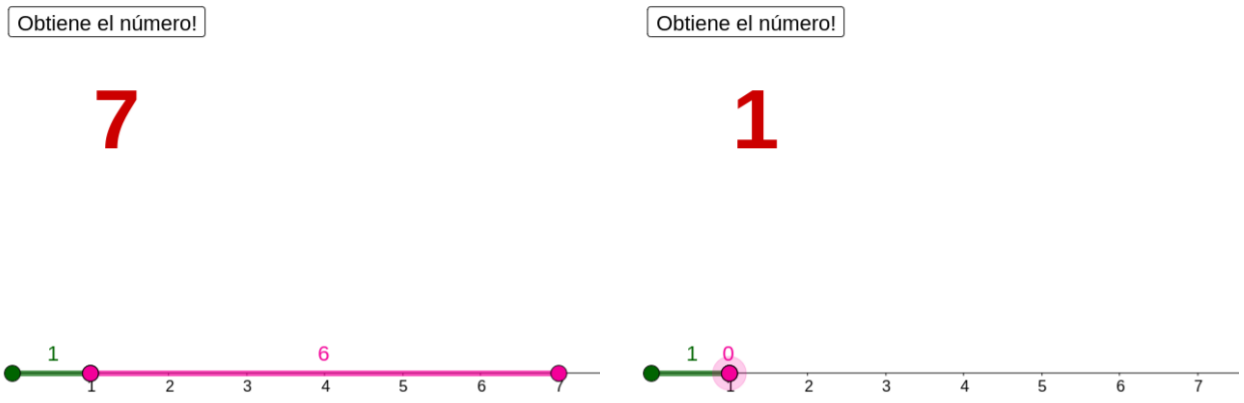


Figura 1.1: En el primer caso el número obtenido es 7*. Una forma posible de resolución es* $1+6$*. En el segundo caso el número obtenido es* 1 *y la consigna se complica porque puede que no se den cuenta que el segmento magenta puede ser* 0*, por lo que es posible que lo marquen como «sin resolución».*.

Jugada 2: *El segmento magenta tiene que medir* 1 *unidad.* Esta jugada es similar a la anterior, las estrategias serán similares.
Jugada 3: *El segmento verde tiene que ser una unidad más largo que el magenta.*

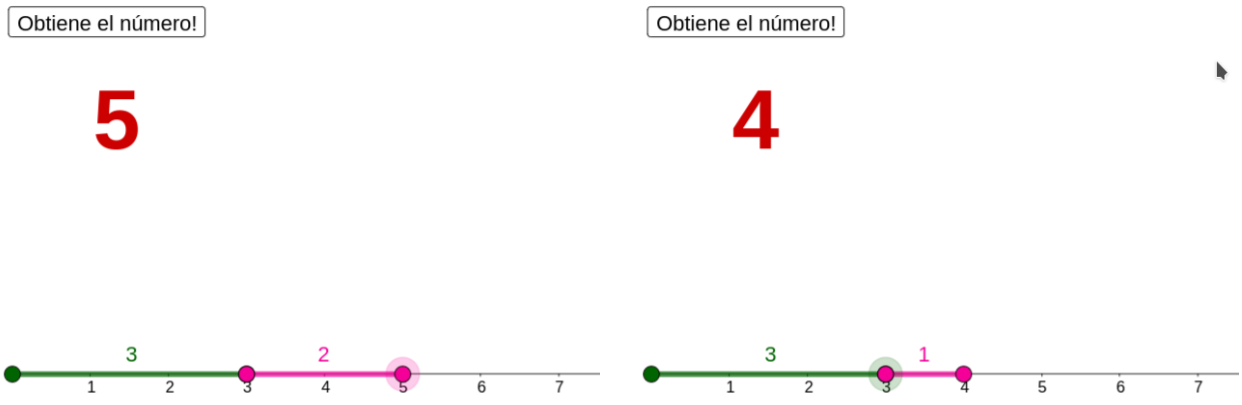


Figura 1.2: El primer ejemplo es 5*, aquí es posible que luego de varios intentos de resolución se den cuenta que solo hay una solución,* $4+3$*. El segundo ejemplo, cuando el número obtenido es par, genera conflictos de resolución ya que no es posible resolver el problema, y será cuestión de debate en la etapa de validación.*

Jugada 4: *Los dos segmentos tienen que tener igual longitud.* En esta jugada habrá complicaciones para resolver números impares. Esto también será un tema a debatir.
Jugada 5: *El segmento verde debe ser par y el segmento magenta impar.*

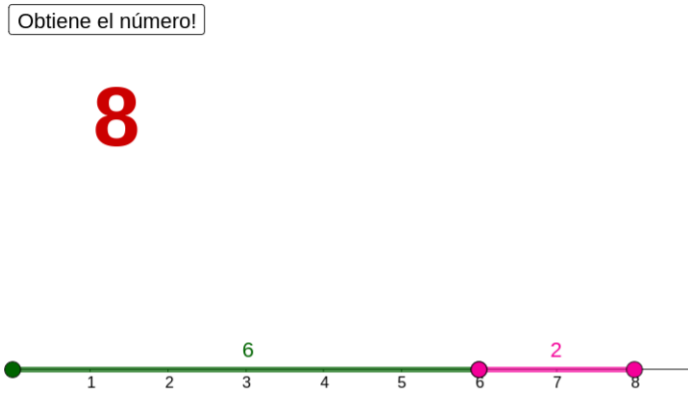


Figura 1.3: Si el número a obtener es impar no habrá problema para resolver la jugada, e incluso podrían existir varias soluciones. En el caso del ejemplo, 8*, se puede hacer que la barra verde sea par (*6*), pero no es posible que la barra magenta sea impar.*

Jugada 6. Los dos segmentos deben ser impares. Este caso es similar al anterior, algunos casos podrán resolverse cuando el número obtenido es par.
Jugada 7. El segmento magenta debe ser el doble del segmento verde.

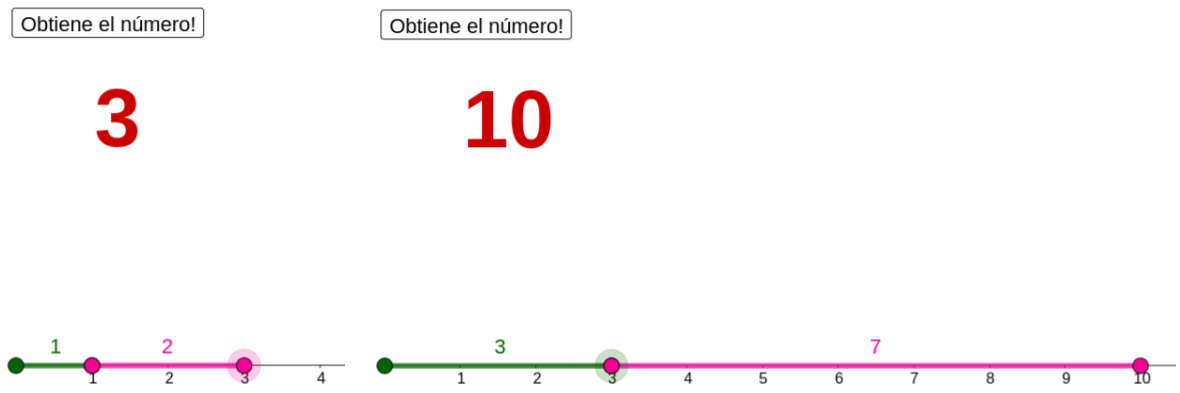


Figura 1.4: El primer caso, 3*, permite la solución única de* $1+2$*. En el segundo caso no es posible cumplir con la condición de que el segmento magenta sea el doble del verde.*

Jugada 8: *El segmento verde debe medir* 10 *unidades.* Este caso «trampa» solo podrá resolverse cuando el número obtenido al azar es 10, y además habrá que darse cuenta que el segmento magenta debe medir 0, si es que se toma la licencia de que un segmento pueda ser de longitud nula.

4. *Verificar y repensar la solución.* En este paso se motivará a los alumnos a pensar todas las posibles soluciones en los casos donde sea posible y a argumentar con razonamiento crítico cuando no sea posible encontrar soluciones. Probablemente la forma de razonamiento será por exhaución o agotamiento, donde se probarán todos los casos posibles para el número que les ha tocado en la jugada. También puede ser interesante que los chicos puedan realizar nuevas jugadas, para confirmar o ratificar sus razonamientos anteriores con distintos casos.

Validación

Será importante establecer algunos conceptos que pueden resultar disruptivos en la resolución de problemas (al menos para el nivel): La multiplicidad de soluciones y la inexistencia de solución. En general, al resolver un problema, se espera que exista una solución y que sea única. El docente deberá asegurarse que el alumnado comprenda bien que a veces es posible que se den varias soluciones (incluso infinitas) o que no exista solución para las condiciones dadas. A la vez, y a modo de ejercicio de razonamiento argumentativo el docente podrá motivar a los alumnos para que modifiquen algunas condiciones para lograr soluciones únicas.

También habrá que repasar los casos donde se pide como condición que los números sean pares o impares, conceptos que hay que repasar en el caso de que no se comprendan correctamente. Será interesante explorar con los alumnos las sumas entre números pares e impares.

Otro concepto a trabajar es el de número «mayor» o «menor», que podrán reforzar estableciendo comparaciones visuales entre los segmentos.

El caso puntual de la *jugada 7* donde se pide que el segmento magenta sea el doble que el segmento verde y que la suma sea 10 abre la posibilidad de debate respecto a los números decimales. Es posible buscar la solución con números racionales (decimal o fracción) para que los alumnos entiendan que es posible encontrar una solución si se amplía el conjunto numérico hacia los Racionales.

La *jugada 8*, y tal vez la *jugada 1*, plantea la idea de un segmento de longitud nula. Si bien la solución es admisible en el conjunto numérico de los Naturales con el 0 (N_0), no es posible afirmar que exista una solución geométrica donde el segmento mida 0.

Formalización

Siendo que esta actividad es mayormente de redescubrimiento, no hay matemáticas nuevas que institucionalizar. Sin embargo, dados los argumentos de la etapa de validación habrá que exponer los siguientes conceptos y situaciones:

- La solución de una operación puede no existir en el conjunto numérico de los Naturales, pero si en otros conjuntos como los Enteros (cuando necesitamos el 0) o en el conjunto de los Racionales.

- Entre las propiedades de de la suma de números Naturales decimos que la suma es una operación cerrada porque el resultado es Natural, pero la resta no lo es (caso que se da cuando cuando un segmento tiene que tener longitud 0). También puede trabajarse la conmutabilidad en la operación suma ($7 + 1 = 1 + 7$, por ejemplo).
- Dos número pares sumados solo resultan en otro número par. La suma entre dos impares también resulta en un par. La suma entre un par e impar, da como resultado un impar.

Asimismo, este problema promueve la reflexión docente sobre una expectativa común del alumnado: la búsqueda de una solución única. La actividad, en cambio, evidencia la posibilidad de múltiples soluciones o la inexistencia de una solución, conceptos fundamentales que pueden resultar disruptivos en la resolución de problemas.

1.2. Múltiplos y divisores

1.2.1. Factores y factores primos

Nombre: Explorando factores.

Resumen: En esta breve actividad se propone explorar, mediante preguntas muy simples, los conceptos de factor de un número y factores primos mediante múltiplos y divisores.

Objetivo: Reconstruir el concepto de factorización de números Naturales.

Saberes: Producto y división de números Naturales, criterios de divisibilidad.

Edad: 11 a 12 años.

Preparación: La actividad puede comenzar a realizarse en papel, con los algoritmos habituales de factorización numérica, sin embargo se utilizan comandos de *GeoGebra* que permitirán validar sus operaciones manuales. En parte el objetivo de la actividad es poder mostrar que existen comandos en la aplicación que pueden ser de utilidad, en especial, cuando los números son relativamente grandes.
Se reconoce en esta secuencia la resignificación de los conceptos relacionados con los múltiplos y divisores, por lo que también puede servir como actividad de diagnóstico o evaluación.

Planteo

Responde cada pregunta:

1. ¿Cuáles son los números que dividen al 15?
2. ¿Qué números dividen al 27?
3. ¿Cuáles dividen al 100?
4. ¿Al 60?, ¿al 280?
5. ¿Los divisores hallados son todos los posibles?
6. En cada uno de los casos anteriores, intenta conseguir el número original multiplicando los números que lo dividen. ¿Existe una sola forma de hacer este producto?

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: La consigna indica encontrar números que dividan al 15, al 27, al 100 y al 60. Al final se pregunta por las formas de multiplicar los números obtenidos obteniendo los originales.
2. *Pensar una estrategia*: Una forma de encontrar divisores menores a 100 es recordar las tablas de multiplicar, y para números más grandes habrá que optar por otra estrategia, como por ejemplo aplicar criterios de divisibilidad (en el caso de que se los conozca) o dividir por cualquier número esperando encontrar resto nulo (es decir, cero). El docente podrá sugerir utilizar *GeoGebra* como una calculadora (en particular para números más grandes que 100).
3. *Ejecutar el plan:* Para cada uno de los números pensaremos algunas soluciones:
   El 15 tiene al 5 y al 3 como divisores.
   El 3 y 9 dividen al 27.
   El 100 está en la tabla del 10, por lo tanto este último lo divide.
   De forma similar el 60 está en la tabla del 6.
   Al 280 está claro que lo divide el 10 porque termina en 0, y además es par, por lo que es divisible por 2.
   El docente podrá en esta parte consultar si los números hallados son todos los divisores posibles. Podemos esperar como respuesta que contesten que si sin percatarse que tanto el 1 como el mismo número también son sus divisores. Este error de conocimiento incompleto puede trabajarse haciendo alguna pregunta del tipo ¿Qué sucede si una persona tiene 15 caramelos y los reparte entre 5 amigos? ¿y si los reparte entre 3 amigos? ¿y si no tiene amigos cómo tiene que hacer la cuenta?

Para los números más grandes los alumnos pueden experimentar en *GeoGebra* con distintas divisiones desde el panel de Vista Algebraica y revisar los resultados, si es entero entonces sabrán que ese número es un divisor y si es decimal podrán descartarlo. Usar el operador «/» en *GeoGebra* puede complicar las cosas un poco porque implica usar fracciones, por eso se sugiere utilizar el comando «*División*()», cuyo resultado devuelve cociente y resto, facilitando la identificación de divisores enteros:

Figura 1.5: Las dos primeras operaciones utilizan «/» como operador, y por lo tanto se utilizan fracciones automáticamente. En cambio las últimas dos divisiones se hacen con el comando «*División*()», el resultado entre llaves son el cociente y el resto, respectivamente.

Para responder la quinta pregunta, podemos intentar expresar cada número como productos de los números que hallamos como divisores. El 15 puede ser escrito como 3×5. El 27 como 3×9. El número 100 puede ser 2×50 o 10×10, entre otras soluciones. El 60 es 2×30 pero también 3×20 o 6×10. Por último, el 280 puede resultar de 10×28,o 2×140.
Aquí el docente tendrá que indagar sobre el carácter compuesto de algunos números apoyándose en los ejemplos anteriores: por ejemplo el 60 es 2×30 y cabe preguntarse ¿cuales pueden ser los divisores de 30? sabemos que $2 \times 15 = 30$, por lo tanto 2 y 15 son divisores. Pero también puede ser escrito como 5×3. Sin definir aún el concepto de número compuesto se pueden analizar otros ejemplos para lograr entender la idea.

4. *Verificar y repensar la solución.* En este último paso de la resolución se verifica entre los distintos alumnos las respuestas obtenidas para cada pregunta del problema, y se exponen las diferentes estrategias aplicadas, si las hubiera. Dado que las preguntas no son exhaustivas en cuanto a hallar la totalidad de los divisores de un número, se espera que exista variada cantidad de respuestas válidas para los números más grandes. Es probable que algún alumno multiplique más de dos divisores, como por ejemplo $3 \times 3 \times 3$ para llegar al 27.

Validación

Es deseable encontrar entre las producciones de los alumnos algún caso de descomposición completa de un número en factores primos, y si esto sucede será un buen ejemplo para exponer a debate donde los divisores de un número no pueden dividirse aún más. Y si naturalmente no se da esta situación, el docente podrá indagar o sugerir si es posible dividir alguno de los números que componen una multiplicación. Por ejemplo el número 18 puede escribirse como 3×6 y a su vez el 6 puede escribirse como 2×3, entonces el 18 puede escribirse como $2 \times 3 \times 3$, sin embargo tanto el 2 y el 3 no pueden dividirse más que por la unidad y consigo mismos.

El docente podrá preguntar: ¿Algunos de los divisores que encontraste pueden a su vez dividirse en nuevos productos? ¿Puedes escribir cada uno de los números anteriores de forma que ninguno de sus divisores puedan subdividirse? Con *GeoGebra* se pueden ir escribiendo las multiplicaciones consecutivas en un único renglón mientras se van calculando:

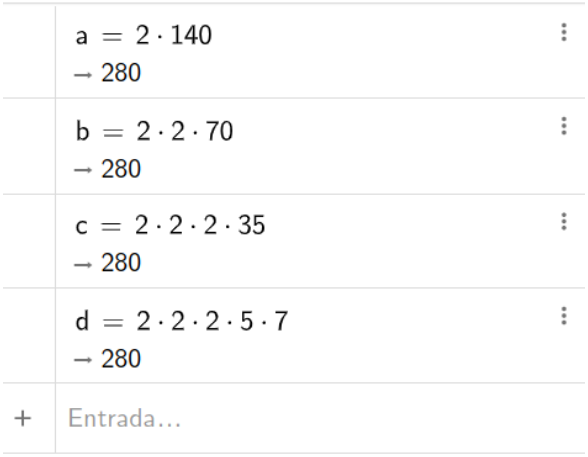


Figura 1.6: Una forma de conseguir el 280 multiplicando todos los factores encontrados. La secuencia muestra cómo se va descomponiendo el último número hasta que ya no se puede más.

La coincidencia de factores, independientemente del orden en que fueron escritos, nos da pie para introducir una noción de número primo. Será necesario resaltar la propiedad conmutativa de la multiplicación para aclarar cualquier duda sobre la igualdad de las expresiones.

Formalización

Quizás sea necesario repasar algunos términos que aparecen en las definiciones, como «número natural», «número primo», «factores de un número» o «divisores de un número». El problema permite empezar a explorar los factores de un número, pero sobre todo los factores primos. Una posible definición de número primo dice que es un «número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores positivos distintos: él mismo y el 1». El docente puede proponer, en esta instancia, nuevos ejemplos de números primos y dejar que los alumnos encuentren nuevos números. Complementariamente se deberá definir el concepto de «número compuesto».

Por último, una vez que los alumnos hayan comprendido y practicado nuevas actividades sobre la factorización de números naturales, podemos mostrarles que en *GeoGebra* hay herramientas que pueden ser muy útiles para encontrar factores de un número:

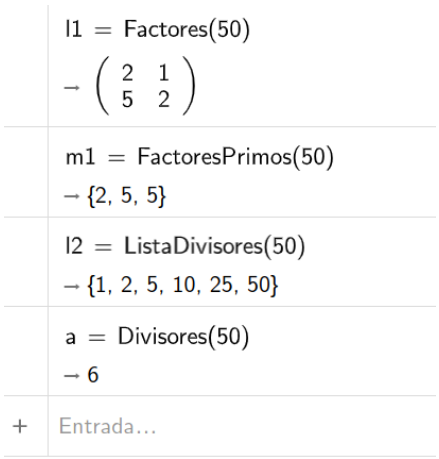


Figura 1.7: Se han utilizados los comandos «*Factores*()», «*FactoresPrimos*()», «*ListaDivisores*()» y «*Divisores*()» para el número 50.

El comando «*Factores*()» devuelve una lista en formato de matriz donde se indican los factores primos en la columna izquierda y la frecuencia en la columna derecha, en cambio «*FactoresPrimos*()» devuelve el mismo listado pero no indica qué cantidad de veces aparece cada uno en la descomposición del número.

En tanto que «*ListaDivisores*()» permite encontrar una lista con los divisores de un número (primos y compuestos). El comando «*Divisores*()» solo indica la cantidad de divisores de un número, lo cual es útil para determinar su un número es primo o no.

1.2.2. Mínimo Común Múltiplo

Nombre: La alineación de los planetas.

Resumen: Se busca, mediante el análisis de los períodos orbitales de los planetas [1], intentar calcular cuando es posible una alineación perfecta entre Mercurio, Venus, la Tierra y Marte, lo que precisamente permite comenzar a trabajar con múltiplos comunes mínimos.

Objetivo: Introducir el concepto del Mínimo Común Múltiplo.

Saberes: Números Naturales, criterios de divisibilidad, Números primos, Múltiplos y Divisores.

Edad: 11 a 12 años.

Preparación: Este problema tiene un formato clásico que permite construir el concepto de MCM, sin embargo los cálculos necesarios para descomponer los números del problema en primos pueden resultar complejos para el nivel. Es por esto que el docente sugiere simplificar el problema para luego, finalmente, resolver el problema original.

Planteo

En las noticias es frecuente que se hable de alineación de planetas. En particular, para el mes de febrero del año 2025 se mencionó una «alineación» poco frecuente entre los planetas Venus, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, sin embargo no es exactamente así debido a que se trata de una conjunción visible en el cielo nocturno para el día 28 de dicho mes.

Tomando esta noticia como disparador el docente expone a la clase lo que sería una alineación perfecta y pregunta al alumnado si es posible que se de esa situación (dejando de lado conceptos un poco más complejos como la desviación angular de las órbitas respecto de la eclíptica). Para ello, luego de debatir sobre esta posibilidad, les propone el siguiente problema:

Los periodos orbitales aproximados (expresados en días) son: Mercurio 88, Venus 225, Tierra 365 y Marte 687. Suponiendo que hoy están alineados, ¿es posible que vuelvan a estar alineados nuevamente en el futuro?, y en tal caso, ¿es posible calcular cuando volverán a alinearse de nuevo la próxima vez?

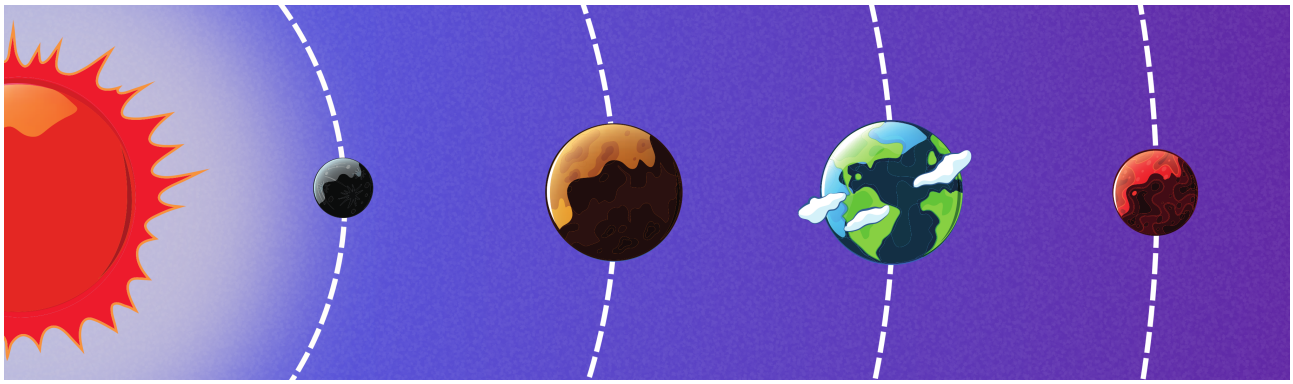


Figura 1.8: El Sol y los planetas Mercurio, Venus, Tierra y Marte. Designed by Freepik.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: Se tienen 4 planetas, Mercurio, Venus, Tierra y Marte en línea recta, cada uno girando en órbitas diferentes alrededor del Sol en períodos también diferentes: 88, 225, 365, 687 días respectivamente. La pregunta indaga si es posible que en un futuro los planetas puedan alinearse nuevamente, y cuando sucedería.
   Debido a la complejidad del problema el docente podrá adicionar algunas preguntas orientadoras que permitirán encauzar las estrategias de resolución, haciendo foco en el concepto de múltiplo de un número

[1] Este problema se puede encontrar en internet desde distintas perspectivas de resolución.

como la forma en que los planetas vuelven a coincidir. Por ejemplo, si Mercurio tarda 88 días en dar una vuelta entonces, ¿cuánto tardará en dar su segunda y tercer vuelta?, ¿al dar estas vueltas, coincide con algún otro planeta en cantidad de días?.

2. *Pensar una estrategia*: Luego de una etapa de lectura individual del problema de algunos minutos el docente buscará armar grupos de trabajo de 3 o 4 niños con el objetivo de generar un debate inicial sobre el problema. El docente podrá aconsejar y motivar al alumnado a realizar gráficas del esquema de planetas, para entender cuál es la situación de partida, cuál es la de llegada y cómo se mueven los planetas alrededor del Sol (velocidades).
   Realizado en *GeoGebra*, pero bien podría hacerse con lápiz y papel, o en la pizarra:

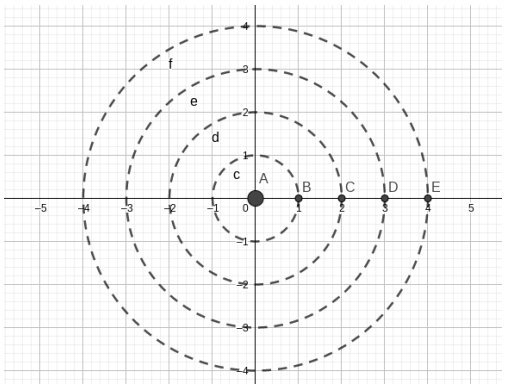


Figura 1.9: Un posible esquema de los planetas orbitando alrededor del Sol (A), en el momento inicial. Los planetas, de B a E, simbolizan Mercurio, Venus, Tierra y Marte.

   Algunas preguntas podrán ser orientadoras: ¿Giran los planetas al unísono alrededor del sol?, es decir, ¿tardan lo mismo en completar sus órbitas?, ¿Cuando B da una vuelta, dónde se encontrarán el resto de los planetas?
   Se espera que los alumnos respondan a estas preguntas entendiendo que algunos planetas necesitarán más vueltas que otros para coincidir. Y que es posible que existan coincidencias parciales antes de que coincidan todos a la vez. Incluso puede surgir, la duda respecto a si giran todos para el mismo lado, lo cual será irrelevante pero para simplificar supondremos que si.
   En este momento el docente sugiere simplificar el problema cambiando los números de días de cada planeta por valores menores, como por ejemplo, 1, 3, 4 y 8. De esta forma si Mercurio tarda 1 día en dar una vuelta y Venus lo hace en 3, entonces solo coincidirán cuando este último termina su vuelta, es decir cada 3 días. Habrá que ver qué sucede con la Tierra y Marte, pero definitivamente simplificar las cuentas permitirá pensar alguna estrategia válida y más fácil de verificar que con los períodos originales. Se busca que la estrategia se centre en la utilización de los múltiplos coincidentes entre todos los números.
   Es posible que algún alumno encuentre una solución válida, aunque no mínima, multiplicando todos los números entre sí. Aquí el docente deberá resaltar la condición de solución que se pide en el problema ¿es esa cantidad de días donde se encontrarán la próxima vez?. Deberá ajustar su estrategia, aunque ya tiene un paso por delante del resto de los alumnos al entender que su estrategia implica la multiplicación.

3. *Ejecutar el plan:* Resolveremos el problema simplificado, para entender si es que realmente funciona la estrategia planteada. Entonces la siguiente tabla[2] resume la cantidad de días que tardan para dar la primera vuelta:

Vuelta	B	C	D	E
1	1	3	4	8

Cuadro 1.1: Días que tardan en dar una vuelta alrededor del sol (A).

   Ahora agreguemos dos vueltas más:

[2]La tabla se puede hacer en *GeoGebra*, desde la vista de Hoja de cálculo.

Vuelta	B	C	D	E
1	1	*3*	4	8
2	2	6	8	16
3	*3*	9	12	24

Cuadro 1.2: Días que tardan en dar 1, 2 y 3 vueltas alrededor de A.

En esta tabla se observa a la tercera vuelta de B coincide con la primera de C, pero no hay coincidencia con los otros dos planetas[3]. Por ello agregamos más vueltas:

Vuelta	B	C	D	E
1	1	3	4	8
2	2	6	8	16
3	3	9	*12*	24
4	4	*12*	16	32
5	5	15	20	40
6	6	18	24	48
7	7	21	28	56
8	8	24	32	64
9	9	27	36	72
10	10	30	40	80
11	11	33	44	88
12	*12*	36	48	96

Cuadro 1.3: Primeras 12 vueltas para cada planeta.

Hay varias coincidencias parciales en esta tabla, es decir no simultáneas entre todos los planetas. Entre otras: 4 vueltas de B coinciden con 1 de D; la 1 de E coincide con 2 de E pero también con las 8 vueltas de B; y 12 de B lo hace con 4 de C y 3 de D, etc.
Nos queda claro ahora que estamos buscando un número en la tabla que coincida de forma simultánea en las cuatro columnas de los planetas. Por ello adicionamos más vueltas a la lista hasta encontrar la primera coincidencia completa:

[3]Estrictamente hablando también hay coincidencia para 2 de D y 1 de E.

Vuelta	B	C	D	E
1	1	3	4	8
2	2	6	8	16
3	3	9	12	*24*
4	4	12	16	32
5	5	15	20	40
6	6	18	*24*	48
7	7	21	28	56
8	8	*24*	32	64
9	9	27	36	72
10	10	30	40	80
11	11	33	44	88
12	12	36	48	96
13	13	39	52	104
14	14	42	56	112
15	15	45	60	120
16	16	48	64	128
17	17	51	68	136
18	18	54	72	144
19	19	57	76	152
20	20	60	80	160
21	21	63	84	168
22	22	66	88	176
23	23	69	92	184
24	*24*	72	96	192

Cuadro 1.4: 24 vueltas para todos los planetas.

Ahora si, observamos que para 24 vueltas de B hay coincidencia con 8 de C, 6 de D y 3 de E. Esta es la primera coincidencia completa entre todos los planetas y resuelve el problema simplificado.

4. *Verificar y repensar la solución.* A pesar de que el problema inicial no está resuelto porque los períodos de órbita originales de los planetas no son $1, 3, 4, 8$ sino $88, 225, 365, 687$, al menos ahora vemos que hay una estrategia que nos lleva a la solución.
El docente podrá indagar, indirectamente, en este momento sobre el concepto de múltiplo de un número, centralizando el debate en el hecho de que el número 24 es divisible por los números de la lista $1, 3, 4, 8$. El concepto de múltiplo debe estar presente porque será necesario en la etapa de validación.
Si algún alumno resolvió multiplicar todos los números entre sí, es decir $1 \times 3 \times 4 \times 8 = 96$ verá que su resultado no coincide con el hallado en la tabla, pero el docente podrá hacerle notar que 96 es un múltiplo de 24, y por lo tanto resuelve parcialmente el problema. También, al dividir $96/24 = 4$ se asocia a que es la cuarta coincidencia la hallada, es decir que cada 24 se obtiene una coincidencia completa, y se puede seguir: $24, 48, 72, 96, ...$

Validación

El docente puede, en esta etapa, motivar a los distintos grupos a que sigan la misma estrategia de resolución, pero esta vez con los números 88, 225, 365, 687. Se verá prontamente que estos números presentan una dificultad de cálculo bastante elevada (que fue lo que motivó a simplificar el problema inicialmente). Por ejemplo verán que es difícil de hallar el número de vueltas coincidente entre 88 y 225, y posiblemente algunos no lleguen a encontrarlo. Entonces, el docente podrá hacer las siguientes preguntas para orientar hacia otra estrategia que involucre el concepto de múltiplo: ¿Qué tienen en común los números $1, 3, 4, 8$ con el 24?, ¿pueden escribir este número (24) como un producto para cada uno de los números?
$24 = 1 \times 24$
$24 = 3 \times 8$
$24 = 4 \times 6$
$24 = 8 \times 3$
Se espera que los alumnos comprendan que los factores de cada número están contenidos en el 24. El docente

podrá resaltar el hecho de que el 4 está contenido en el 8, es decir que el primero es un divisor del segundo, el segundo un múltiplo del primero. Y también está el 1 en todos los números. Pero no así el 3. Es necesario que surja en este momento el concepto de «número primo»: ¿Qué sucede si descomponemos el 24 en producto entre primos?, ¿qué vemos en común con los números de la lista $1, 3, 4, 8$?
$24 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
De esta forma es obvio que cada uno de los números de la lista $1, 3, 4, 8$ están «adentro» del 24, es decir que pueden formarse con algunos de los números que dividen al 24. ¿Qué sucede si descomponemos en primos a cada uno de los números $1, 3, 4, 8$?[4]:
$1 = 1$
$3 = 1 \times 3$
$4 = 1 \times 2 \times 2$
$8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2$
Claramente ahora se observa que el 24 está formado por los factores comunes y no comunes de cada uno de los números, como el 1, el 2 y el 3, pero en cantidades que más se repiten (el 2 lo hace tres veces). Para estar más seguro de ello se puede probar con cualquier combinación de números.
Ahora probemos descomponiendo los números de la lista $88, 225, 365, 687$[5] para entender cómo funciona esa lógica con ellos:
$88 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 11$
$225 = 1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$
$365 = 1 \times 5 \times 73$
$687 = 3 \times 229$
Ahora, podemos calcular nuestra próxima coincidencia entre las órbitas de los cuatro planetas multiplicando entre sí los factores comunes y no comunes de forma análoga a la anterior:
$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11 \times 73 \times 229 = 330996600$ días, es decir $\frac{330996600}{365} = 906840$ años (aproximadamente si no tomamos en cuenta los días bisiestos). Con esto queda resuelto el problema.

El docente resaltará la idea de que calculado de esta forma el valor encontrado es el *menor de los factores comunes* entre las órbitas de los cuatro planetas, es decir es el Mínimo Común Múltiplo o MCM entre esos cuatro números.

Posteriormente les mostrará a los alumnos cómo calcularlo con *GeoGebra* utilizando el comando «MCM()», cuyo argumento pueden ser dos números separados con una coma o una lista[6] compuesta por números:

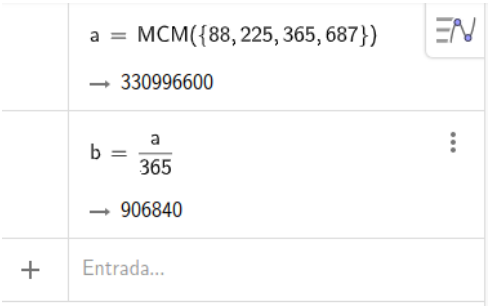


Figura 1.10: El valor a es el $MCM(88, 225, 365, 687)$ expresado en días, luego se lo divide por 365 para obtener b, su equivalente en años.

El comando es muy útil cuando se trata de valores muy grandes, aunque no nos muestra el proceso de obtención de los factores. Para ello podemos utilizar el comando «FactoresPrimos()», donde el argumento es un número:

[4] Obviaremos en esta parte el hecho de que el número 1 no es primo para no desviar el razonamiento hacia otro tema.
[5] Para 88 y 225 el cálculo será fácil, pero con 365 y 687 se podrán asistir con una calculadora o *GeoGebra*.
[6] En *GeoGebra* una lista es una colección de objetos encerrados en llaves y separados por comas.

Figura 1.11: Las listas de factores calculados coincide con las obtenidas anteriormente, excepto por el valor 1.

Formalización

Por definición, el «mínimo común múltiplo» o MCM entre de dos o más números naturales es el *menor múltiplo común* de todos ellos.

Dicho de otra forma, el MCM es el menor de los múltiplos comunes entre varios números. Por ejemplo, si los múltiplos comunes de 2 y 3 son $6, 12, 18...$, el mínimo común múltiplo es el 6, ya que es el menor de los múltiplos comunes de 2 y 3.

Para hallar el MCM de dos números, m y n podemos destacar entonces dos métodos:

1. Armar una lista con los múltiplos consecutivos de cada uno de los números m y n. El número buscado será el menor de los múltiplos que figure en ambas listas a la vez.

2. Descomponer m y n en números primos, luego multiplicamos todos los factores primos comunes y no comunes elevados a la mayor potencia.

Por ejemplo para el 6 y 8 tenemos:

1. $M_3 = \{6, 12, 18, 24, 30, ...\}$, $M_8 = \{8, 16, 24, 32, ...\}$, por lo tanto el $MCM(6, 8) = 24$

2. | m | *dividido en...* |
   |---|---|
   | 6 | 3 |
   | 2 | 2 |
   | 1 | 1 |
   | | $6 = 1 \times 2 \times 3$ |

   , | n | *dividido en...* |
   |---|---|
   | 8 | 2 |
   | 4 | 2 |
   | 2 | 2 |
   | 1 | 1 |
   | | $8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2$
$8 = 1 \times 2^3$ |

   , por lo tanto $MCM(6, 8) = 1 \times 2^3 \times 3 = 24$

Una vez explicados estos algoritmos que permiten hallar el MCM de dos o más números el docente podrá avanzar con algunas de sus propiedades y problemas aplicados, donde directamente podrán utilizar los comandos de *GeoGebra* aprendidos para resolver.

1.3. Proporcionalidad

1.3.1. Regla de tres simple inversa

Nombre: Partido de fútbol.

Resumen: Con una situación-problema de organización de un torneo de fútbol se introduce el concepto de proporcionalidad inversa. La actividad lleva al alumnado a pensar en cómo pueden repartir el tiempo de juego para que todos los jugadores puedan participar equitativamente del partido.

Objetivo: La actividad busca construir el concepto de la regla de tres simple inversa haciendo foco en el razonamiento de reparto del que luego deriva la regla.

Saberes: Proporcionalidad.

Edad: 11 a 12 años.

Preparación: El problema requiere avanzar con una estrategia de prueba y error, orientando a la clase hacia la confección de una tabla que combina tiempo con posiciones. En particular para este problema se utiliza la vista de planilla de cálculo de *GeoGebra*, pero también se admite su realización en papel o en otro tipo de software donde se puedan editar tablas. De hecho, no se utilizarán otras herramientas del programa. Antes de comenzar quizás convenga formar grupos de tres o cuatro integrantes para pensar el problema, pudiendo tener una etapa individual para pensar creativamente una solución. Además es probable que muchos chicos hayan participado en torneos y conozcan la dinámica de los cambios en los partidos.

Planteo

Se está organizando un torneo de fútbol donde cada equipo puede presentar un total de 16 jugadores, como *máximo*. Uno es el arquero y el resto son jugadores que pueden rotar y jugar en cualquier posición. Cada partido se juega en dos tiempos de 30 minutos, es decir 60 minutos en total. Lógicamente, a la cancha entran 11 jugadores por equipo y las reglas indican que se pueden hacer tantos cambios como se quieran, excepto para el arquero que siempre es el mismo.

Juan invitó a sus amigos y armó un equipo propio con 16 jugadores: un arquero y 15 jugadores. Quiere que jueguen todos, y que todos estén la misma cantidad de tiempo en el campo de juego para ser equitativos, salvo el arquero que juega todo el tiempo.

¿Puedes ayudar a Juan a calcular cuánto tiempo jugará cada uno? ¿Puedes diagramar cómo podrían ser los cambios de jugadores que hay que hacer, cuándo entra y sale cada uno?

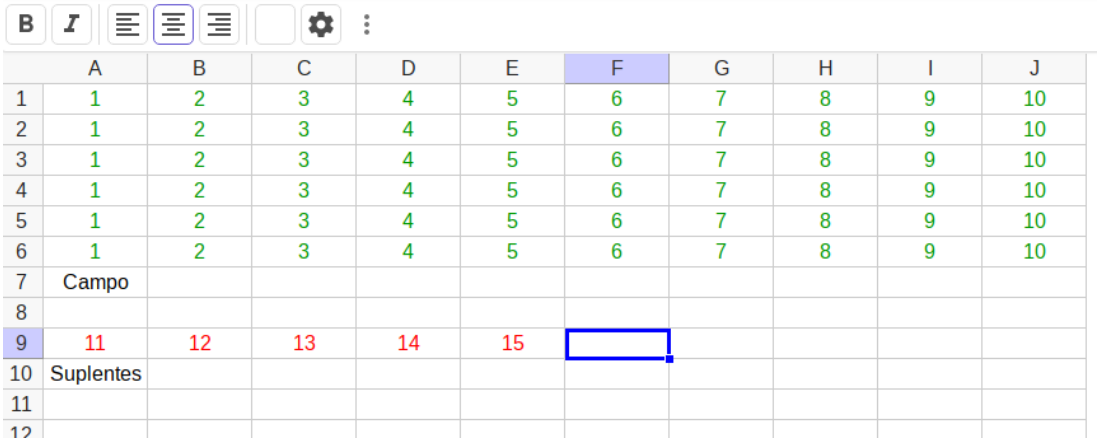
Figura 1.12: Torneo de fútbol. Imágenes de SVGREPO.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema trata sobre un torneo de fútbol de 11 contra 11, donde los jugadores pueden entrar y salir de la cancha en cualquier momento, sin límites, excepto los arqueros que se quedan siempre en el campo de juego. El partido se juega a 60 minutos en dos tiempos y cada equipo lleva hasta 16 jugadores por encuentro, donde uno es un arquero y el resto son jugadores que pueden jugar en cualquier posición. Todos tienen que jugar la misma cantidad de tiempo, que se pide calcular. También inventar un diagrama donde se visualicen los cambios, para saber cuándo entra y sale cada jugador.
   El docente deberá asegurarse de que los alumnos tienen claras las premisas del problema: hay 10 posiciones donde se juegan 60 minutos, y hay 15 jugadores que deberán ocupar esas posiciones en el mismo tiempo (sin importar los roles dentro de la cancha).

2. *Pensar una estrategia*: El planteo pide resolver un problema de reparto de tiempos, y como tal podría pasar que los alumnos asociaran esto con la división. El docente deberá guiarlos siempre con preguntas que hagan referencia a si lo que están pensando realmente resuelve el problema, es decir, si sus respuestas tienen lógica de resolución.
   Posibles estrategias pueden ser dibujar o graficar los jugadores (solo basta con un equipo, ya que para el equipo contrario será similar), y empezar a probar cambios. Además, se darán cuenta que si 10 posiciones deben ser ocupadas por 10 jugadores en 60 minutos, entonces al usar más jugadores cada uno de ellos tendrá que jugar menos de 60 minutos. Entonces, una posibilidad es armar un gráfico en una hoja de cálculo donde las columnas representen las posiciones y cada casillero sea un bloque de 10 minutos de juego. Será una estrategia de prueba y error donde seguramente surjan distintas soluciones para los diagramas.
   Si no se da naturalmente en la clase, el docente podrá proponer modificar el escenario del problema para ayudarlos a pensar estrategias de resolución: ¿Qué pasaría si fueran 10 jugadores solamente? ¿y si fueran el doble, es decir 20 jugadores que quieren jugar? ¿Cómo serían los tiempos de juego para cada uno de ellos?

3. *Ejecutar el plan:* Antes de comenzar a ejecutar cualquier plan de resolución el docente deberá asegurarse de que todos han entendido que a mayor cantidad de jugadores se requiere menor cantidad de tiempo de juego para cada uno de ellos. En el caso puntual de la pregunta realizada por el docente *¿Qué pasaría si fueran* 10 *jugadores solamente?* la respuesta es 60 minutos para cada uno, en cambio *¿y si fueran el doble, es decir* 20 *jugadores que quieren jugar?* deducirán que los primeros jugadores deberán salir antes para dar lugar a otros, por ejemplo iniciando el primer tiempo 10 jugadores y luego los otros 10 para el segundo tiempo, jugando una totalidad de 30 minutos cada uno. Estas preguntas tienen un sentido didáctico: hacer que los alumnos deduzcan que al ser 15 jugadores (sin arquero), un número entre 10 y 20, deberán jugar entre 30 y 60 minutos cada uno (no sabemos el número exacto). Es decir, a más jugadores, menos tiempo de juego individual. También es posible que algunos de los alumnos anticipen una respuesta lineal para esto, usando una proporcionalidad directa: el 45 está entre 60 y 30, por lo que la respuesta final será esa para ellos a lo que el docente podrá sugerirles que vean si verifica el problema. En caso de que insistan con su respuesta el docente tomará nota de esta respuesta errónea para que luego la debatan y defiendan en el paso de «verificación del problema».
   Para llevar adelante la estrategia de la gráfica en bloques de 10 minutos, abrimos en *GeoGebra* la hoja de cálculo y luego diagramamos usando los números del 1 al 16 para los jugadores disponibles. El diagrama inicial sería algo así:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	Campo									
8										
9	11	12	13	14	15					
10	Suplentes									
11										
12										

Figura 1.13: La tabla muestra las 10 posiciones cubiertas por 10 jugadores. Cada casilla de la planilla representa un bloque de 10 minutos para cada jugador y cada número del 1 al 15 a un jugador. En verde figuran los jugadores que están en la cancha y en rojo los suplentes, afuera del campo de juego.

Debe quedar claro que cada columna representa un bloque de 60 minutos para cada posición o puesto, es decir que 6 espacios de tiempo multiplicado por 10 minutos = 60 minutos en total.
Una posible estrategia inicial puede ser quitar del campo de juego algunos jugadores y reemplazarlos por suplentes con la premisa de que todos jueguen la misma cantidad de tiempo. Para simplificar podemos comenzar agrupando el total de jugadores de 5 en 5:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
5	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
6	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
7	Campo									
8										

Figura 1.14: Se realizaron cambios en los primeros 5 puestos para el segundo tiempo.

Con este panorama nos damos cuenta de que los jugadores 1 al 5 solo jugaron el primer tiempo, y los del 11 al 15 el segundo tiempo, media hora cada uno (recordando que cada casillero representa 10 minutos, $10+10+10=30$). Sin embargo los jugadores 6 al 10 jugaron 60 minutos ($10+10+10+10+10+10=60$). Como no todos están jugando la misma cantidad de tiempo sabemos que hay que balancear este segundo grupo, quitando algunos de ellos y poniendo de los primeros (que están de suplentes en el segundo tiempo):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	11	12	13	14	15	1	2	3	4	5
5	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
6	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
7	Campo									
8										

Figura 1.15: Se reemplazó parte del segundo grupo en los primeros 10 minutos de juego del segundo tiempo.

Ahora vemos que los jugadores 1 al 5 juegan 40 minutos, los jugadores 6 al 10 juegan 50 minutos y los jugadores 11 al 15 juegan 30 minutos. Está claro que hay que seguir balanceando el grupo del 6 al 10, disminuyendo su tiempo en cancha para que pueda aumentar el grupo del 11 al 15.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	2	3	4	5	11	12	13	14	15
4	11	12	13	14	15	1	2	3	4	5
5	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
6	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
7	Campo									
8										

Figura 1.16: Ahora el tercer grupo entra a jugar los últimos 10 minutos del primer tiempo.

Nota: Se ha cuidado de repartir los grupos de forma que no se «pisen» los tiempos de juego. Es posible que algún grupo haga el reemplazo solapando los momentos, y aún así pueda repartir numéricamente de forma equitativa los minutos de juego. El docente tendrá que estar atento a esta situación. Así tenemos que los grupos quedan equitativamente repartidos

Grupo	Reparto	Tiempo individual total
Grupo 1 al 5	30 minutos del primer tiempo + 10 minutos del segundo tiempo	40 minutos
Grupo 6 al 10	20 minutos del primer tiempo + 20 minutos del segundo tiempo	40 minutos
Grupo 11 al 15	10 minutos del primer tiempo + 30 minutos del segundo tiempo	40 minutos

Cuadro 1.5: Respuesta: Todos juegan 40 minutos de forma individual.

4. *Verificar y repensar la solución.* Cabe plantearse otras posibles soluciones que también dan respuesta al problema, como la siguiente que en realidad es el mismo esquema pero más ordenado:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	2	3	4	5	11	12	13	14	15
4	1	2	3	4	5	11	12	13	14	15
5	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
6	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
7	Campo									
8										

Figura 1.17: Es la misma tabla pero ordenados los grupos 1 al 5 en un solo bloque.

O tal vez esta otra distribución:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	2	3	4	5	11	12	13	14	15
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10
6	11	12	13	14	15	1	2	3	4	5
7	Campo									
8										

Figura 1.18: Los cambios se dan en distintos momentos pero los resultados son los mismo: 40 minutos de juego individual para cada uno.

Por otra parte podría suceder que se los alumnos desarrollen tablas con otras organizaciones y disposiciones de cambios aparentemente más caóticos pero que igual respondan a la solución del problema.
Es probable que aquellos grupos que linealmente habían dispuesto la solución en 45 minutos se den cuenta ahora que su resultado no cuadra con la disposición en la tabla, por lo que tendrán que descartar esa idea.

Validación

Para validar la resolución el docente hará foco en una situación que se desprende de la tabla de distribución de jugadores: la totalidad de tiempo de juego entre todos los jugadores, que es lo que en realidad se reparte entre todos los que jueguen:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
2	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
5	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
6	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Figura 1.19: La tabla muestra la disposición rectangular de 6×10 en bloques de 10 minutos.

Es decir, la totalidad de minutos a repartir son $10\,columnas \times 6\,filas \times 10\,minutos = 600\,minutos$, donde las columnas son los jugadores y las filas son los bloques de tiempo. Esto es así por que en el diagrama dividimos el tiempo en bloques de 10 minutos, pero en realidad la cuenta sería $10\,jugadores \times 60\,minutos = 600$ [7].

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	60	60	60	60	60	60	60	60	60	10

Figura 1.20: Es un rectángulo de 1×10.

Luego ese valor se reparte entre todos los jugadores que intervienen, que en nuestro caso son 15: $600/15 = 40\,minutos$ por cada jugador. Dicho de otra forma:

> Si 10 jugadores juegan un partido en 60 minutos, entonces, ¿cuántos minutos jugarán 15 jugadores para el mismo tiempo total de juego?
> Rta: $\frac{10\times60}{15} = 40\,minutos$

Para entender mejor la cuenta podemos cambiar las cantidades del problema: ¿Qué sucedería si fueran 20 los jugadores en total? Pues habría que repartir esos 600 minutos entre 20, es decir:

> Si 10 jugadores juegan un partido en 60 minutos, entonces ¿cuántos minutos jugarán 20 jugadores para el mismo tiempo total de juego?
> Rta: $\frac{10\times60}{20} = 30\,minutos$

También podríamos cambiar la cantidad de minutos de juego y combinar, por ejemplo, un total de 50 minutos para un total de 16 jugadores en una cancha de 11 jugadores por equipo (uno es el arquero).

> Si 10 jugadores juegan un partido en 50 minutos, entonces ¿cuántos minutos jugarán 16 jugadores para el mismo tiempo total de juego?
> Rta: $\frac{10\times50}{16} = 31,25\,minutos$ [8]

Formalización

Para poder conceptualizar el tema *regla de tres simple inversa* el docente necesariamente deberá recordar a los alumnos la *regla de tres simple directa*, por el simple hecho de que su nombre lo contempla. En la etapa de validación se trató de mostrar cómo podría ser el algoritmo de resolución en estos casos, reflejado en la cuenta:

> Si 10 jugadores juegan un partido en 60 minutos, entonces, ¿cuántos minutos jugarán 15 jugadores para el mismo tiempo total de juego?
> $10 \longrightarrow 60$
> $15 \longrightarrow x \Rightarrow \frac{10\times60}{15} = 40\,minutos$

Algunos libros de texto muestran que como los alumnos ya conocen la *regla de tres simple directa* y conocen su algoritmo de resolución como una proporción donde el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

> $a \longrightarrow b$
> $c \longrightarrow x \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{x} \Rightarrow a \times x = c \times b \Rightarrow x = \frac{c\times b}{a}$

[7] La unidad es $jugadores \times minutos$, lo cual conviene omitir por el momento para no confundir la clase.
[8] Habrá que hacer el pasaje a minutos y segundos, 31, 25 minutos son en efecto 31 minutos y 15 segundos. Desde luego esta respuesta es impracticable en la cancha de juego.

Entonces para calcular una *regla de tres simple inversa* simplemente *invierten* una razón antes de aplicar la regla y prosiguen como si se tratara de una proporción *directa*:

$10 \longrightarrow 60$
$15 \longrightarrow x$
Como es inversa $\Rightarrow$15 y 10 intercambian posiciones
$15 \longrightarrow 60$
$10 \longrightarrow x \Rightarrow \frac{10 \times 60}{15} = 40\, minutos$

Posteriormente la clase puede seguir aplicando ejercicios y problemas similares en afán de practicar el algoritmo de la regla.

Capítulo 2

Álgebra y funciones

2.1. Expresiones algebraicas y ecuaciones

2.1.1. Introducción a las expresiones algebraicas

Nombre: Secuencia de palillos.

Resumen: La actividad -de autor desconocido- propone la *«secuencia»* como estrategia didáctica para introducir al trabajo algebraico desde lo numérico: Supone un cambio del *«álgebra como aritmética generalizada»* hacia el *«álgebra como instrumento de modelización»*. Asimismo, por cómo se plantea el problema, es una excelente oportunidad para armar grupos de alumnos de forma que en cada uno de ellos se trabaje aisladamente hasta el momento de la verificación.

Objetivo: Introducir las expresiones algebraicas desde una actividad con *«secuencias»*.

Saberes: Operaciones con enteros. Sucesiones numéricas.

Edad: 11 a 12 años.

Preparación: Esta actividad es permite introducir a los alumnos al pensamiento algebraico. Permite al docente trabajar didácticamente la ruptura aritmético-algebraica necesaria para que los alumnos evolucionen desde el cálculo de operaciones aritméticas hacia un pensamiento más abstracto, algebraico.
Es una actividad que requiere una fuerte presencia del docente a la hora de recolectar datos sobre las estrategias utilizadas. Por ello, para simplificar la búsqueda de estrategias quizás sea una buena idea ir realizando las preguntas de a una, dejando que los alumnos trabajen con cada una de ellas paso a paso.
De la forma en que está planteada la actividad es posible comenzarla desde lo lúdico, con palillos realescomo materiales tácitos y luego trabajarlo desde *GeoGebra*.

Planteo

Tenemos muchos palillos y los empezamos a disponer de la siguiente forma: primero un cuadrado, luego dos cuadrados que comparten un lado, luego tres cuadrados consecutivos, siempre pegados uno al otro. Así sucesivamente, como se ve en la siguiente figura:

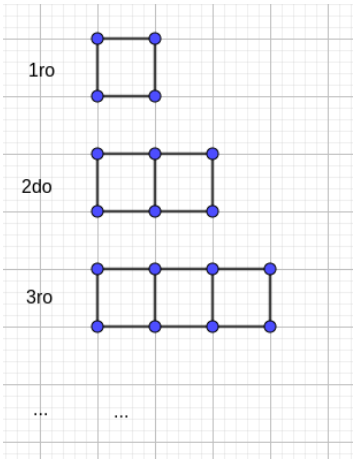
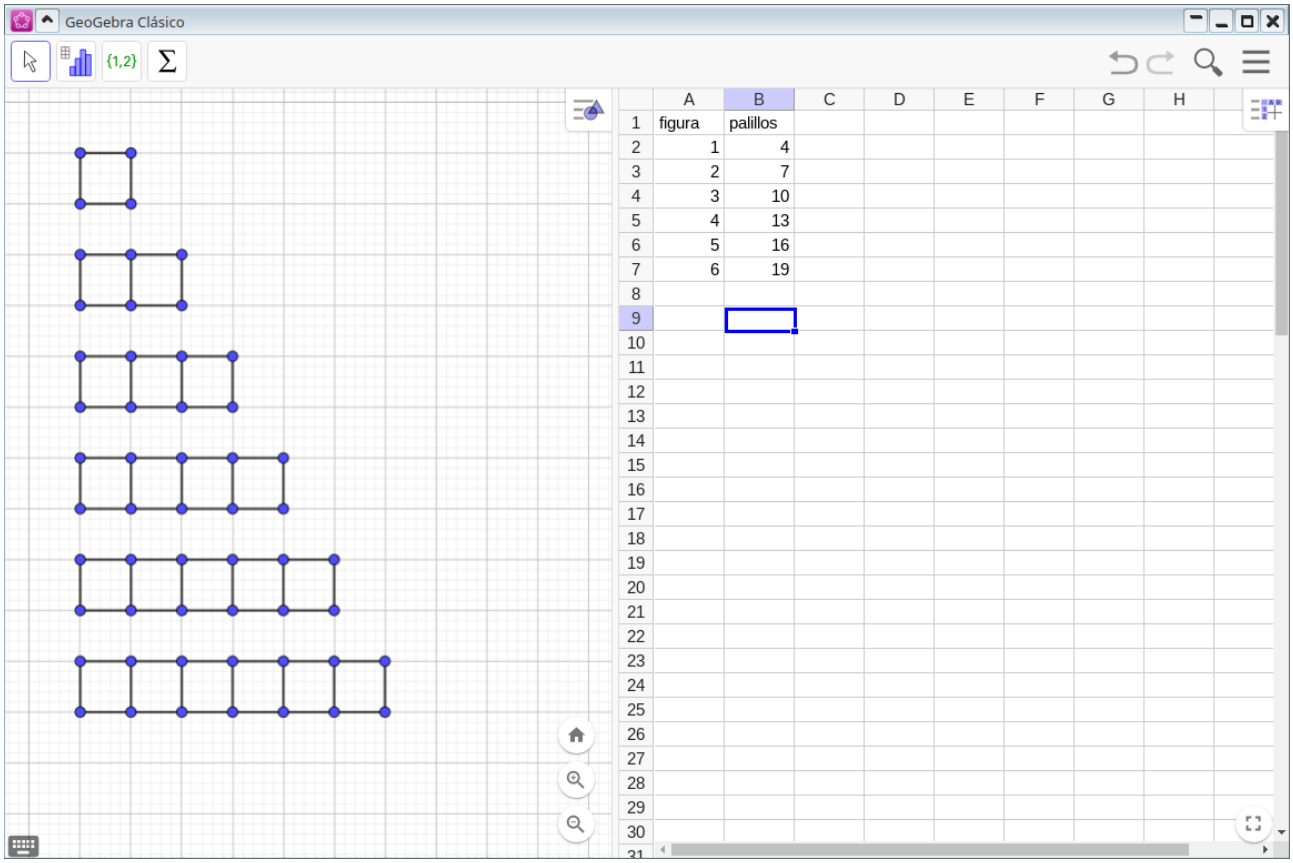


Figura 2.1: La secuencia de cuadrados se construye con palillos y sigue indefinidamente...

1. Cuántos palillos son necesarios para construir la figura que ocuparía el sexto lugar?
2. Para construir la figura que ocuparía el lugar 100 ¿Cuántos palillos son necesarios?
3. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular la cantidad de palillos que ocuparía la figura correspondiente al lugar *«n»*?
4. ¿Es posible construir una figura como la del modelo que tuviera exactamente 154 palillos? ¿y 1550?

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: Cada lado de un cuadrado es un palillo, y para dos cuadrados consecutivos se comparte un palillo. El problema posee varias preguntas que parecen ser cada vez más complejas de responder. Se pregunta por la sexta secuencia, por la número 100 y por la que ocupa un lugar «*n*» desconocido. Al final se pregunta por la figura que necesita una cierta cantidad de palillos.
2. *Pensar una estrategia*: Preparamos *GeoGebra* para trabajar con las secuencias, desde el menú «Vista» cerramos la «Vista Algebraica» y abrimos la «Vista de Hoja de Cálculo».
   Para contestar las preguntas se construirán las secuencias y se anotarán tanto las figuras como las cantidades de palillos necesarias para construir cada una. Es probable que se den distintas formas de contar, mayormente apoyadas en la búsqueda de patrones visuales, pero también es posible que algún niño encuentre regularidades numéricas directamente.
3. *Ejecutar el plan:* Se dibujan los cuadrados siguiendo las reglas de construcción dadas en el problema y se cuentan las secuencias.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	figura	palillos						
2	1	4						
3	2	7						
4	3	10						
5	4	13						
6	5	16						
7	6	19						
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								

Figura 2.2: Primeras seis figuras de a secuencia de palillos y su correspondiente tabla a la derecha. La sexta figura posee 19 palillos.

Sabemos ahora que la respuesta de la primer pregunta, la cantidad de palillos necesarios para construir la figura que ocupa el lugar sexto es de 19.
Al construir las figuras nos damos cuenta que dibujar lleva un tiempo considerable, pero también que existe un patrón de conteo dependiendo de cómo las dibujemos. Exploraremos diferentes formas de conteo.
Por ejemplo, si dibujamos un cuadrado para la primer figura, luego al cuadrado le dibujamos 3 palillos más, y luego otros 3...

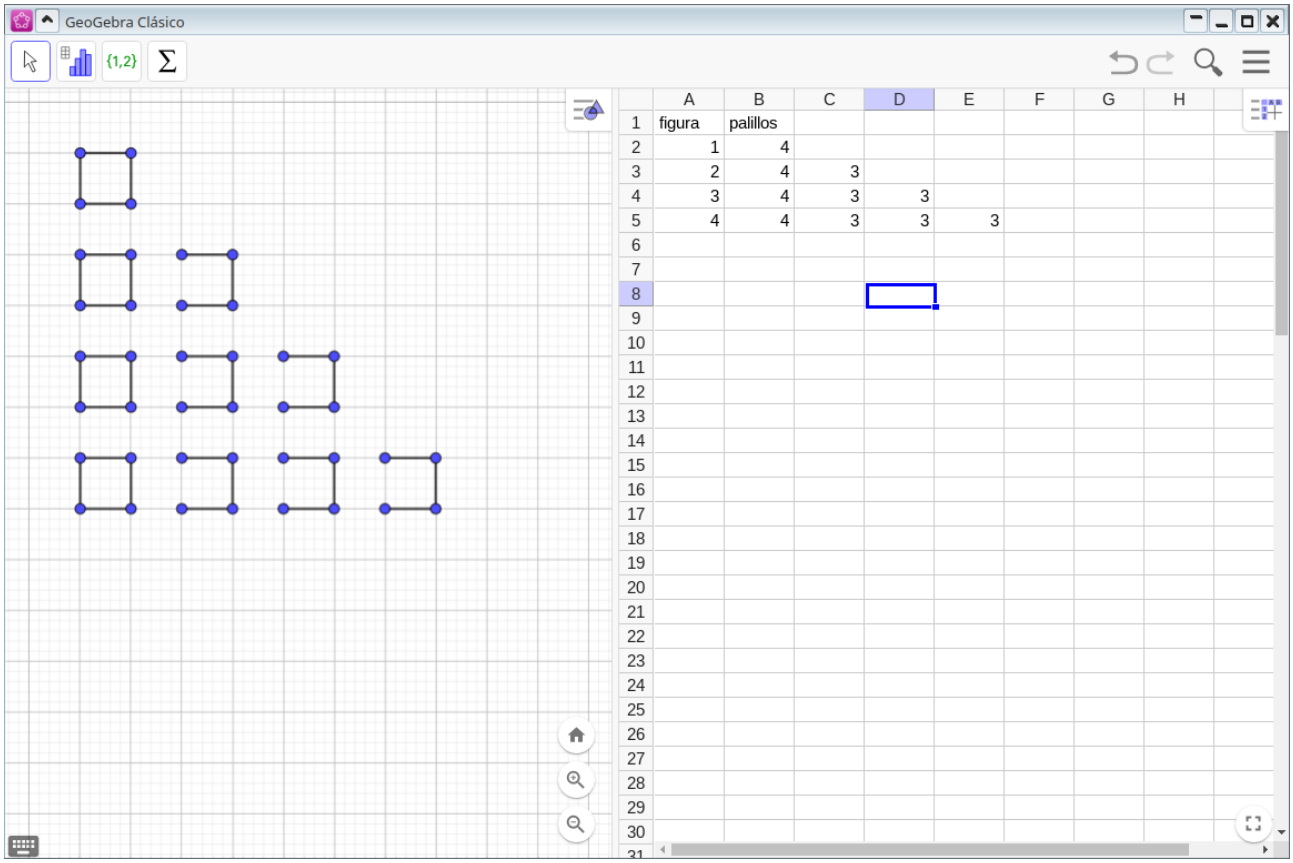
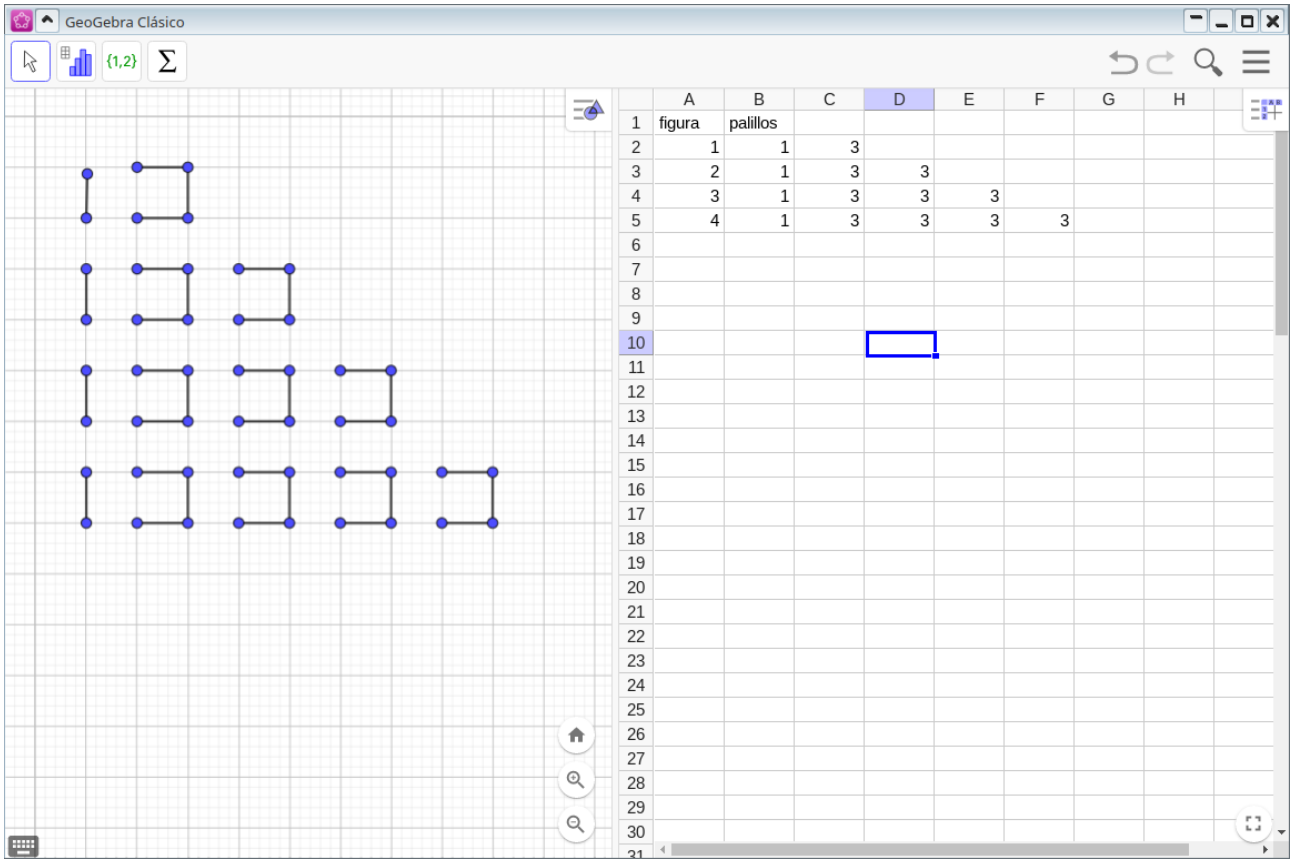


Figura 2.3: Al cuadrado inicial se le suman 3 palillos por paso. Para la cuarta figura son 4 palillos iniciales más 3 veces 3 palillos.

También podríamos pensar en una secuencia donde se dibuje un palillo al que se le adicionen 3 palillos en cada paso:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	figura	palillos						
2	1	1	3					
3	2	1	3	3				
4	3	1	3	3	3			
5	4	1	3	3	3	3		

Figura 2.4: Al primer palillo se le suman 3, y luego otros 3... Para la cuarta figura son 1 palillo más 4 veces 3 palillos.

Otra forma de contar puede ser multiplicar por 4 la cantidad de cuadrados que tiene la figura y restarle la cantidad de palillos que se superponen o repiten. De esta forma para la segunda figura son $2 \times 4 = 8$ palillos, menos 1 que se superpone; para la tercera figura son $3 \times 4 = 12$, menos 2 palillos que se repiten:

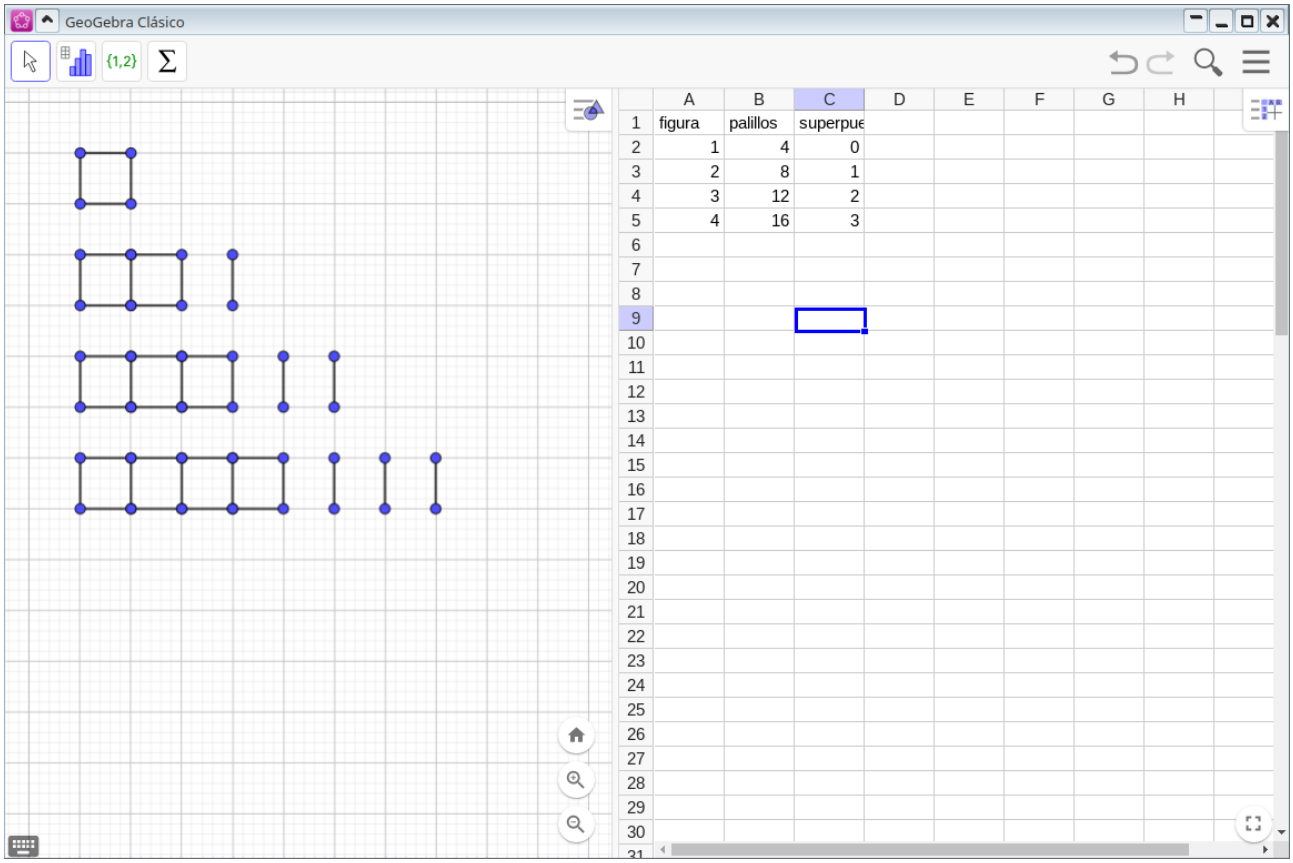


Figura 2.5: La secuencia muestra los palillos que hay que restar en cada figura. Para la cuarta figura son 4 palillos por 4 cuadrados menos 3 palillos superpuestos.

Para cualquiera de los anteriores casos se tiene un patrón de conteo que permite obtener respuesta a la segunda pregunta. Con la primer estrategia, se tiene que para el lugar 100 son $4+3\times 99$, lo que da como resultado 301 palillos. La segunda estrategia establece que a 1 hay que sumarle 3×100, lo cual resulta en 301 palillos. Para la tercer estrategia se multiplica por 4 la cantidad de cuadraditos, que son 100 y se le restan 99 que se superponen, que también da por resultado 301 palillos.
¿Es posible construir una figura como la del modelo que tuviera exactamente 154 palillos? ¿y 1550? Para responder estas preguntas podemos aproximar por tanteo con cualquiera de las tres estrategias de conteo. Tomaremos la segunda estrategia por ser la más fácil de calcular:
- Por ejemplo para la figura 50 son $1+3\times 50=151$ palillos, entonces para la figura número 51 son $1+3\times 51=154$ palillos.
- Para saber si se puede construir una figura con 1550 intentamos aproximar con la misma estrategia, por ejemplo para la figura 500 se necesitan $1+3\times 500=1501$, para la figura 520 son $1+3\times 520=1561$, para la figura 515 son $1+3\times 515=1546$, y para la figura 516 son$1+3\times 516=1549$ palillos. Nos falta uno para llegar a 1550, y sabemos que cada figura de la secuencia se incrementa de 3 en 3, por lo que la respuesta es que no es posible construir una figura con exactamente 1550 palillos.

4. *Verificar y repensar la solución.* Si se ha trabajado en grupos, éste es un buen momento para que cada equipo indique cómo llegó a las respuestas. La forma de verificar las respuestas estará condicionada por las estrategias de conteo que se realizaron. Se pueden poner a prueba los métodos de conteo proponiendo nuevos números de palillos o posiciones de figuras, utilizando la calculadora como método rápido para la verificación, sobretodo para números de grandes.

Validación

En esta etapa todo el docente introducirá la noción de variable para reemplazar *la figura que ocupa el enésimo lugar*. Propondrá que cada grupo redacte un breve párrafo donde se den instrucciones de cómo calcular la cantidad de palillos necesarios para una posición desconocida de la secuencia. Luego, para cada estrategia

se deberá reemplazar el texto coloquial por un lenguaje simbólico que, lógicamente, llevará a una fórmula particular. Por ejemplo:

> Para saber cuántos palillos son necesarios para cierto lugar de la secuencia debo sumar 1 con el resultado de la multiplicación por 3 del número de lugar. Lo que es lo mismo que poner Cantidad de palillos $= 1 + 3 \times n$, siendo «n» el lugar de la figura dentro de la secuencia.

De esta forma se tienen las siguientes fórmulas equivalentes[1], que podrán ser más o menos difíciles de obtener dependiendo de la complejidad de la estrategia de conteo utilizada:

- Primer estrategia de conteo: $C = 4 + 3 \times (n - 1)$
- Segunda estrategia de conteo: $C = 1 + 3 \times n$
- Tercera estrategia de conteo: $C = 4 \times n - (n - 1)$

En *GeoGebra*, se pueden trabajar secuencias directamente como comandos. Para ello, se puede utilizar la Vista Algebraica o el módulo CAS. El comando *Secuencia*() admite varios argumentos.

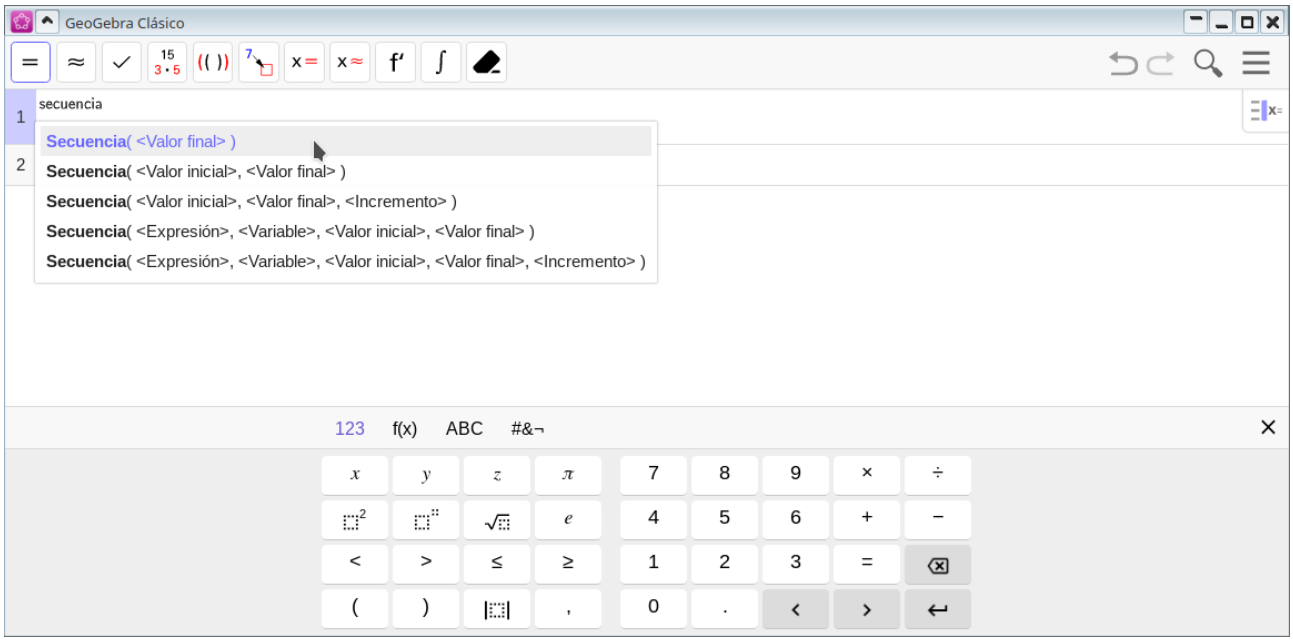


Figura 2.6: Ayuda contextual del comando *Secuencia*().

A modo de ejemplo, tomemos las siguientes 5 secuencias:

[1] Modelos algebraicos equivalentes.

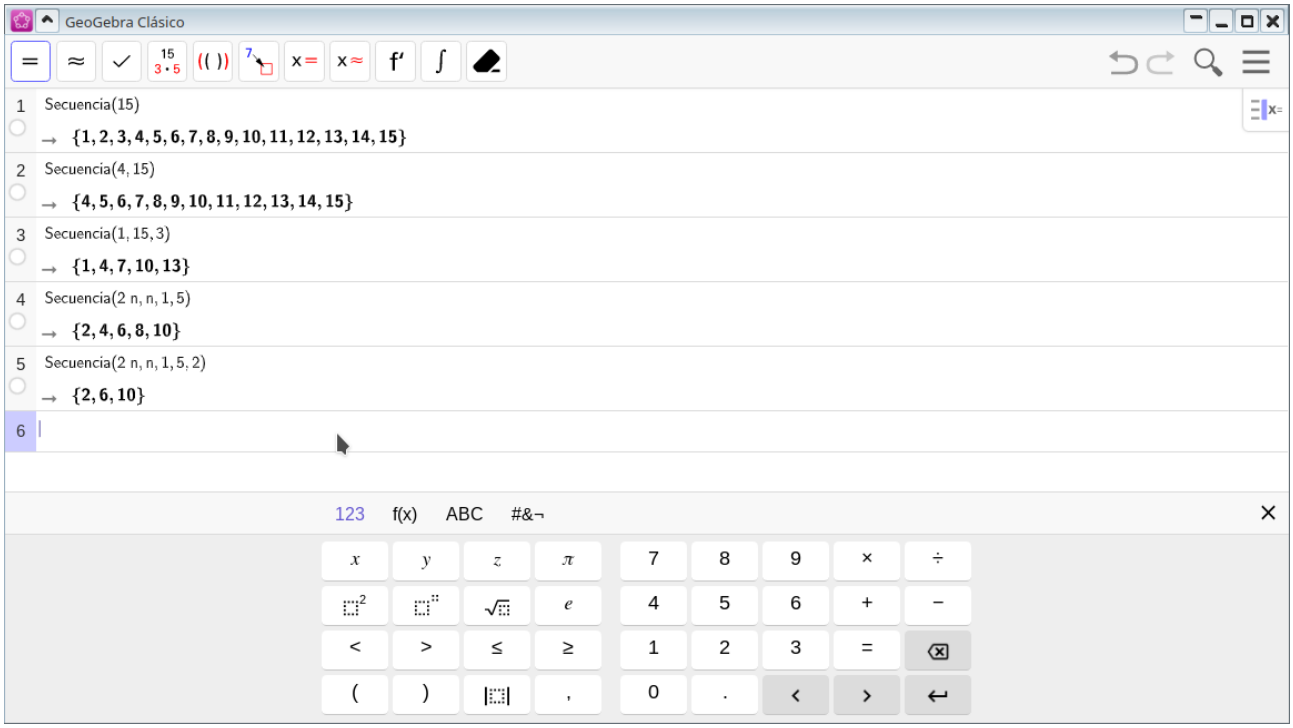


Figura 2.7: Ejemplos de secuencias en *GeoGebra*.

1. La secuencia con el argumento 15 listará la sucesión de números enteros consecutivos del 1 al 15.
2. Si agregamos el argumento de valor inicial 4, podemos recortar esa lista de enteros consecutivos entre el 4 y el 15 números.
3. Un tercer argumento con el valor de incremento 3 permite iniciar una secuencia entre el número 1 y el 15 que suma de 3 en 3.
4. El argumento de expresión aporta una regla más compleja para el incremento, en el ejemplo es $2n$, desde el 1 al 5 para el valor «n». Nos devuelve los primeros 5 números pares.
5. La última opción agrega un incremento para «n», que en este caso va de 2 en dos, es decir $2 \times 1 = 2$, $2 \times (1 + 2) = 6$ y $2 \times (3 + 2) = 10$.

Con esta herramienta podemos probar computacionalmente las fórmulas obtenidas en cada estrategia de conteo:

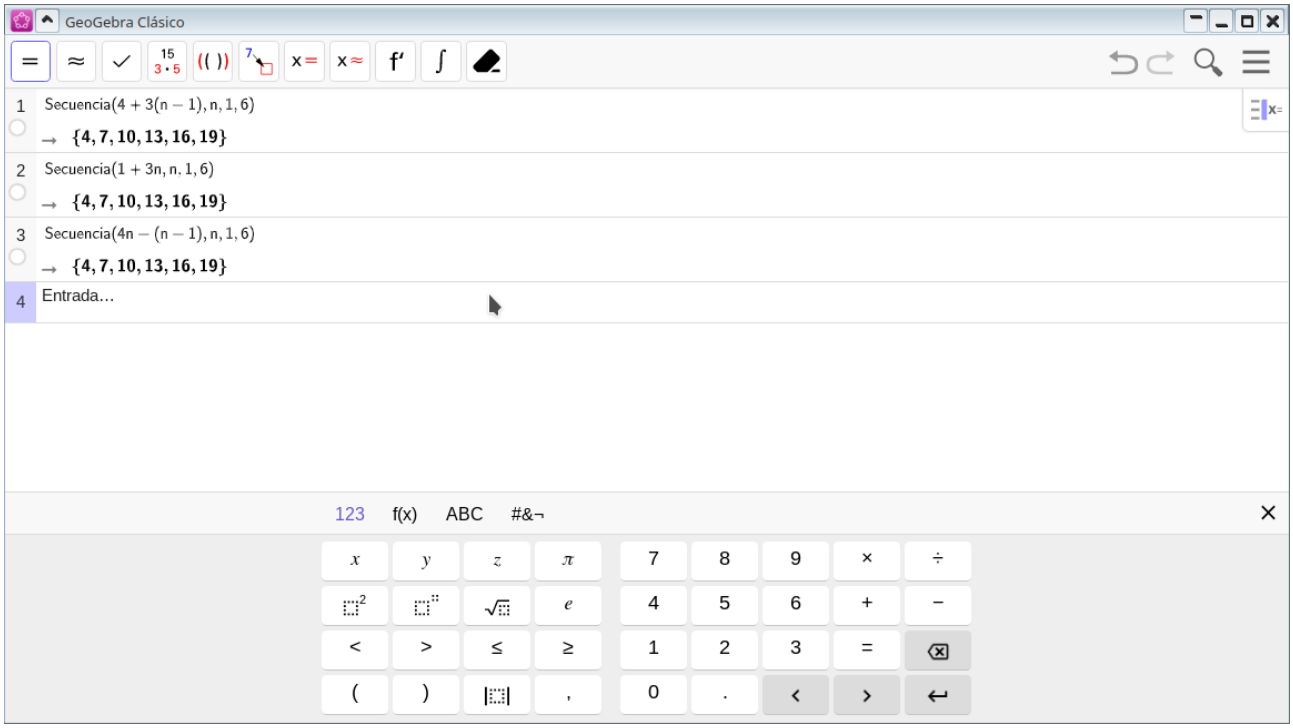


Figura 2.8: Secuencias del 1 al 6 para cada estrategia de conteo.

Por ejemplo, si se quiere obtener solo la cantidad de palillos para la figura número 100 solo basta con calcular $Secuencia(1 + 3n, n, 100, 100)$.

Formalización

Las fórmulas utilizadas son expresiones algebraicas, que se definen como expresiones construidas a partir de constantes enteras, variables y operaciones algebraicas.

Será de utilidad mostrar, a continuación de esta formalización, ejemplos de distintas expresiones algebraicas, para que se entienda cómo pueden formarse. Posteriormente se podrá iniciar el estudio de polinomios y su factorización.

2.1.2. Cuadrado de un Binomio

Nombre: Ventana con vidrio repartido.

Resumen: La actividad plantea un problema realista donde el objetivo es llegar a obtener las fórmulas que permitan encontrar el área de vidrio de una ventana cuadrada con vidrio repartido. Permite descubrir la relación de igualdad entre las expresiones algebraicas del *cuadrado de un binomio* y el *trinomio cuadrado perfecto*.

Objetivo: Descubrir la fórmula del *cuadrado de un binomio* y el *trinomio cuadrado perfecto*.

Saberes: Operaciones de expresiones algebraicas, área del rectángulo.

Edad: 13 a 15 años.

Preparación: El problema no requiere preparación previa, sin embargo al tratarse de varillas de entre 20 y 60 centímetros el docente tiene la opción de preparar el material didáctico en madera o plástico. Manipular los materiales permitirá a los alumnos entender el problema desde otra perspectiva.
En cuanto al trabajo con *GeoGebra* en esta actividad permite agilizar las verificaciones de cálculos de áreas ya que se auto-calculan a medida que se van graficando.

Planteo

Un fabricante de aberturas tiene que fabricar ventanas cuadradas con vidrio repartido. Tiene diferentes medidas de varillas «*a*» y «*b*» para armar sus ventanas siguiendo la muestra que se ve en la imagen.

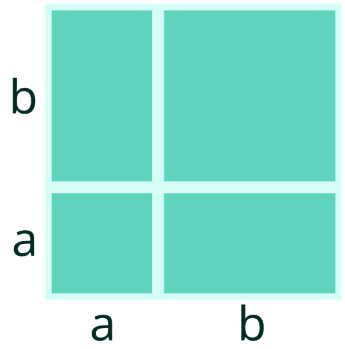


Figura 2.9: Formato de ventana con vidrio repartido.

Con el fin de poder calcular la superficie de los vidrios que necesita para construir estas ventanas, está buscando encontrar dos fórmulas que le permitan calcular cada una de las siguientes situaciones:

1. *El área de vidrio que necesita para cada uno de los polígonos de la ventana.*
2. *El área de vidrio total que necesita la ventana.*

¿Podrías ayudarlo?

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema plantea la situación de un fabricante que tiene que encontrar dos fórmulas que le permitan encontrar el área de vidrio necesario para una ventana con divisiones internas. Tiene las medidas «*a*» y «*b*» que, juntas, forman cada lado de la ventana.
   La figura de la ventana muestra dos cuadrados de distinto tamaño y dos rectángulos con distinta disposición. Se espera que los alumnos se den cuenta que la ventana resulta ser cuadrada debido a su diseño. El docente podrá preguntar sobre cómo son esos rectángulos.

2. *Pensar una estrategia*: Se recomienda que este problema se trabaje de forma grupal, de entre tres y cuatro alumnos por grupo. Antes de comenzar el proceso de pensar estrategias el docente podrá adelantarse y preguntar a los alumnos sobre cuáles podrían ser las posibles medidas de «a» y «b», y de esta forma indagar si los alumnos han entendido el enunciado. ¿Puede armar una ventana con varillas de $30cm$ y $50cm$? ¿Y con varillas de $20cm$ y $60cm$? ¿Cuáles serían entonces las medidas de cada parte de la ventana? ¿Cuáles serían las medidas de la ventana completa?
   También deberá indagar si recuerdan cómo se calcula el área de un cuadrado y de un rectángulo.
   Esta bajada a una situación con medidas concretas y reales por parte del docente tiene como finalidad que los alumnos se familiaricen con el problema y puedan pensar en una estrategia que puedan resolver numéricamente, haciendo cuentas. Entonces, para contestar cada una de las preguntas es probable que los grupos intente primero resolver ejemplos numéricos y luego vayan por una solución algebraica con formato de fórmula. Buscarán resolver primero un ejemplo con medidas concretas y luego intentarán encontrar las fórmulas para cada caso. El docente podrá adelantarse y repartir para cada grupo pares de medidas, entre las que se aconseja que existan pares que sumen el mismo valor, como $20 + 60$ y $30 + 50$, con la finalidad de retomar esta situación más adelante para su análisis grupal.

3. *Ejecutar el plan:* Supongamos que un grupo ha tomado como ejemplo las varillas de $30cm$ y $50cm$. Graficarán la ventana y le darán las medidas a cada parte:

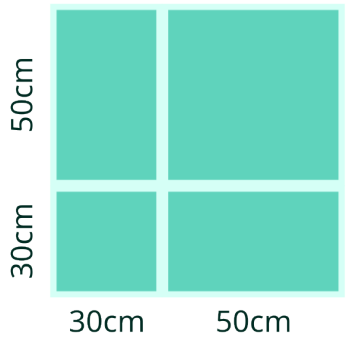


Figura 2.10: La ventana tiene sus medidas, $30cm \times 50cm$.

Para responder la primer pregunta calcularán la superficie de cada parte de la ventana utilizando la fórmula del área del rectángulo/cuadrado, base por altura:
Cuadrado menor $\rightarrow 30 \times 30 = 900cm^2$
Cuadrado mayor $\rightarrow 50 \times 50 = 2500cm^2$
Rectángulo superior izquierdo $\rightarrow 30 \times 50 = 1500cm^2$
Rectángulo inferior derecho $\rightarrow 50 \times 30 = 1500cm^2$

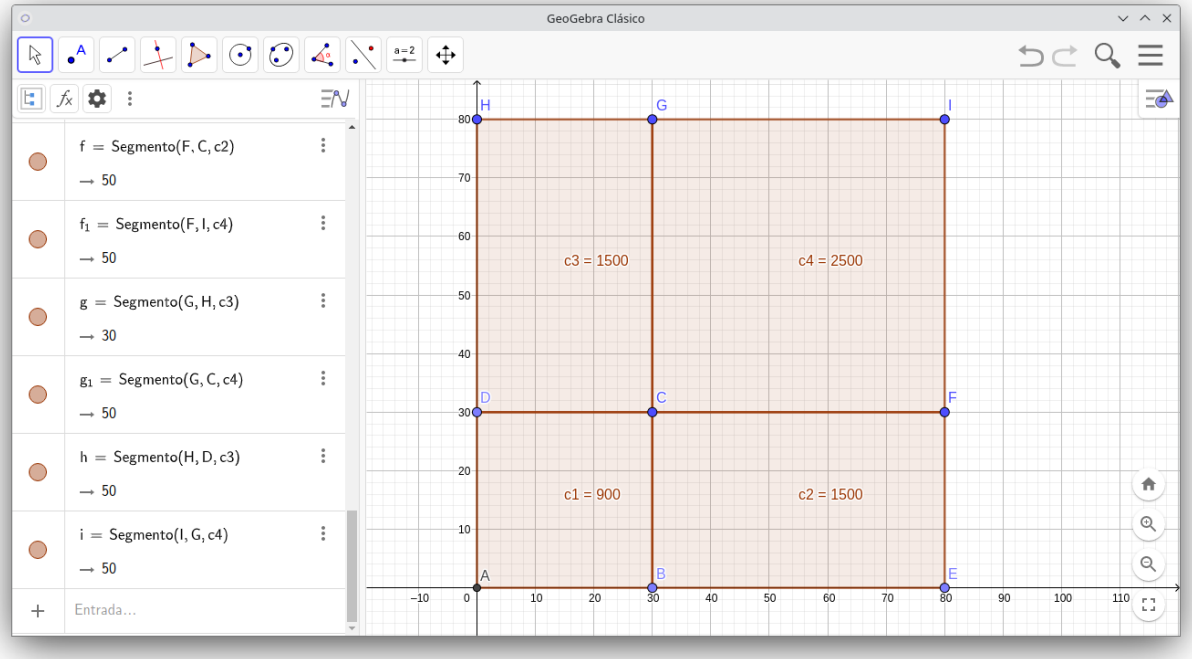


Figura 2.11: La construcción de la ventana con las medidas de ejemplo en *GeoGebra* permite llegar a los mismos resultados.

Es probable que se den cuenta que los dos rectángulos son necesariamente congruentes y en consecuencia tienen la misma área. Y en caso de que no lo hicieran, el docente podrá indagar sobre cómo son las medidas de estos rectángulos y si importa la posición en que se encuentra cada uno.
Para la segunda pregunta podrán optar por sumar las superficies de todas las partes anteriores, entendiendo que la suma de las partes es igual al total. También podrán sumar los lados y luego hacer la multiplicación correspondiente. El docente deberá estar atento a esta situación, ya que necesitaremos que surjan las dos formas de cálculo, como se verá más adelante en la etapa de validación.
Ventana como suma de las partes $\rightarrow 900cm^2 + 2500cm^2 + 1500cm^2 + 1500cm^2 = 6400cm^2$
Ventana como un gran cuadrado $\rightarrow (30cm + 50cm) \times (30cm + 50cm) = 80cm \times 80cm = 6400cm^2$
En todo momento el docente deberá tratar de que los alumnos sean prolijos y ordenados cuando anotan las cuentas, resaltando que escriban cada parte de las operaciones sin comprimir pasos, ya que será de guía para la siguiente etapa.
Si bien el problema habla de encontrar las fórmulas que permitan determinar *«1. El área de vidrio que necesita para cada uno de los polígonos de la ventana.» y «2. El área de vidrio total que necesita la ventana.»* nos conformaremos con que los alumnos puedan anotar en un párrafo el procedimiento que les permita hallar las áreas de cada parte y el área total de la ventana. Esto servirá como punto de partida para la etapa de validación. Se espera que cada grupo pueda expresar con la mayor sencillez cómo hizo para obtener sus resultados.

4. *Verificar y repensar la solución*: Este paso podrá hacerse de forma interna a cada grupo, analizando si lo realizado tiene sentido, si hay errores e incluso si es posible llegar a los mismos resultados de forma diferente.
El docente podrá hacer algunas preguntas que luego se podrán retomar en la etapa de validación, como por ejemplo: ¿Puede ser el valor «*a*» mayor a «*b*»? ¿Pueden ser iguales estos valores?. Estas preguntas tienen como objetivo desvincular cierta preconceptos sobre las medidas que surge de la observación directa de la gráfica inicial de la ventana, donde la medida de «*a*» es claramente menor que la de «*b*».
También podrá resaltar la coincidencia entre áreas de aquellas ventanas que tienen diferentes medidas de vidrio repartido ($20 + 60$ y $30 + 50$ por poner un ejemplo).

Validación

Una vez resuelto el problema de ejemplo para cada grupo, el docente guiará al grupo hacia la obtención de las fórmulas que permitan dar respuesta al problema original, es decir, motivará en primer lugar a que cada grupo de alumnos puedan exponer oralmente sus casos particulares para luego mostrar cómo llegaron a sus resultados. A la vez esto permitirá avanzar hacia el pensamiento algebraico como abstracción de la labor aritmética, es decir como una generalización de las cuentas realizadas para obtener cada área.

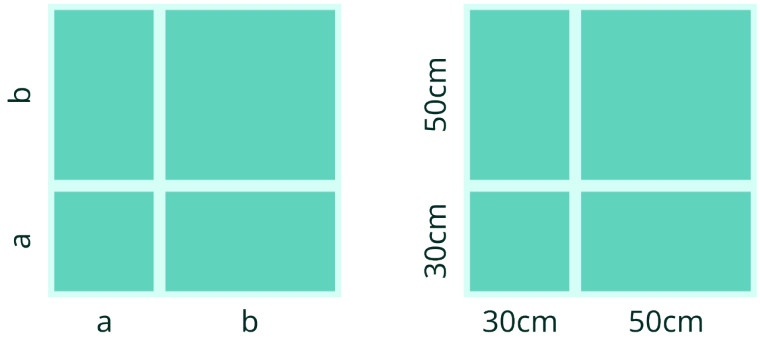


Figura 2.12: Comparación entre la ventana *genérica* con la ventana *de ejemplo*.

Para obtener «*El área de vidrio que necesita para cada uno de los polígonos de la ventana.*» hacemos la comparación:

Cuadrado menor $\rightarrow 30 \times 30 = 900cm^2 \rightarrow a \times a = a^2$

Cuadrado mayor $\rightarrow 50 \times 50 = 2500cm^2 \rightarrow b \times b = b^2$

Rectángulo superior izquierdo $\rightarrow 30 \times 50 = 1500cm^2 \rightarrow a \times b$

Rectángulo inferior derecho $\rightarrow 50 \times 30 = 1500cm^2 \rightarrow b \times a$

La suma de todo lo anterior es entonces:

$a^2 + b^2 + a \times b + b \times a = a^2 + b^2 + 2ab$, haciendo notar que ab es lo mismo que ba.

La notación del «*área de vidrio total que necesita la ventana*» puede resultar más compleja:

Ventana como un gran cuadrado $\rightarrow (30cm + 50cm) \times (30cm + 50cm) = 80cm \times 80cm = 6400cm^2 \rightarrow (a + b) \times (a + b)$

Ahora, es posible que los alumnos no sepan o no se den cuenta de qué hacer con esta última expresión, a lo que el docente podrá recordares la propiedad distributiva en estas operaciones combinadas:

$(a + b) \times (a + b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2$, expresión que coincide con la suma de cada vidrio de la ventana...

Por último el docente hará notar que $(a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$, y por transitividad se da la igualdad entre todas las expresiones halladas:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ o $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, dependiendo de cómo queramos anotarlo.

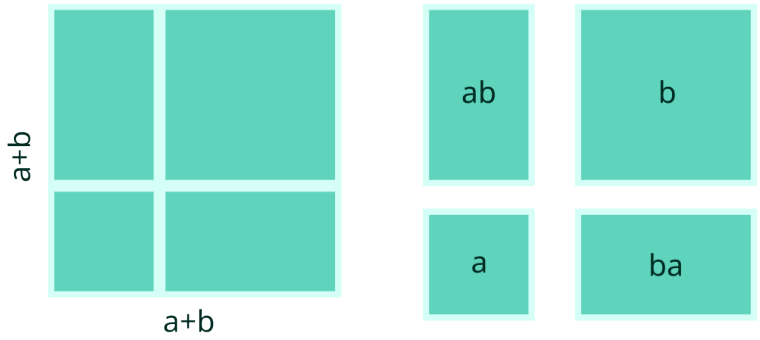


Figura 2.13: En la imagen se observa que el área del cuadrado de lado $a + b$ es igual a la suma de las áreas de sus partes, es decir $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Formalización

La formalización de este contenido radicará en la postulación que relaciona el *cuadrado de un binomio* con el *trinomio cuadrado perfecto*, que luego se podrá retomar como un caso de factoreo:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

La actividad didáctica podrá continuar con problemas aplicados y ejercicios de práctica donde sea necesario plantear la conversión desde el cuadrado del binomio $(a+b)^2$ hacia el trinomio cuadrado perfecto $a^2 + 2ab + b^2$ y viceversa.

Por ejemplo, «En la fábrica de aberturas se sabe que van a utilizar una varilla de $20cm$ para el cuadrado menor, y varillas de distintas medidas para el cuadrado mayor según cómo lo solicite el cliente. ¿Cómo queda la fórmula en este caso?». Partiendo de la fórmula podemos hallar la respuesta fácilmente:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (20+b)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times b + b^2 \rightarrow (20+b)^2 = 400 + 40b + b^2$

Y a la inversa también se podrán plantear problemas que necesiten partir del trinomio para llegar al binomio cuadrado, como el siguiente: «En la fábrica alguien encontró la fórmula $2500 + 100x + x^2$, ¿es posible saber cuál es la medida fija de la ventana?». Para este caso habrá que comparar la fórmula con el trinomio cuadrado perfecto y si verifica correctamente entonces sabremos las medidas:

$2500 + 100x + x^2 \text{¿} =? a^2 + 2ab + b^2$

$2500 = b^2 \Rightarrow b = 50$

$100x = 2ab \Rightarrow 100x = 2 \times 50 \times b \Rightarrow x = b$, luego

$x^2 = b^2$

Por lo tanto verifica el Trinomio Cuadrado Perfecto:

$2500 + 100x + x^2 = (50+x)^2$

Entonces la medida fija del paño es $50cm$ y la medida variable es «x».

A continuación se sugiere avanzar con otro producto notable como es el «cubo de un binomio», aprovechando la lógica de construcción algebráica aplicada para el cuadrado del binomio. Su construcción gráfica es relativamente fácil de realizar en *GeoGebra:*

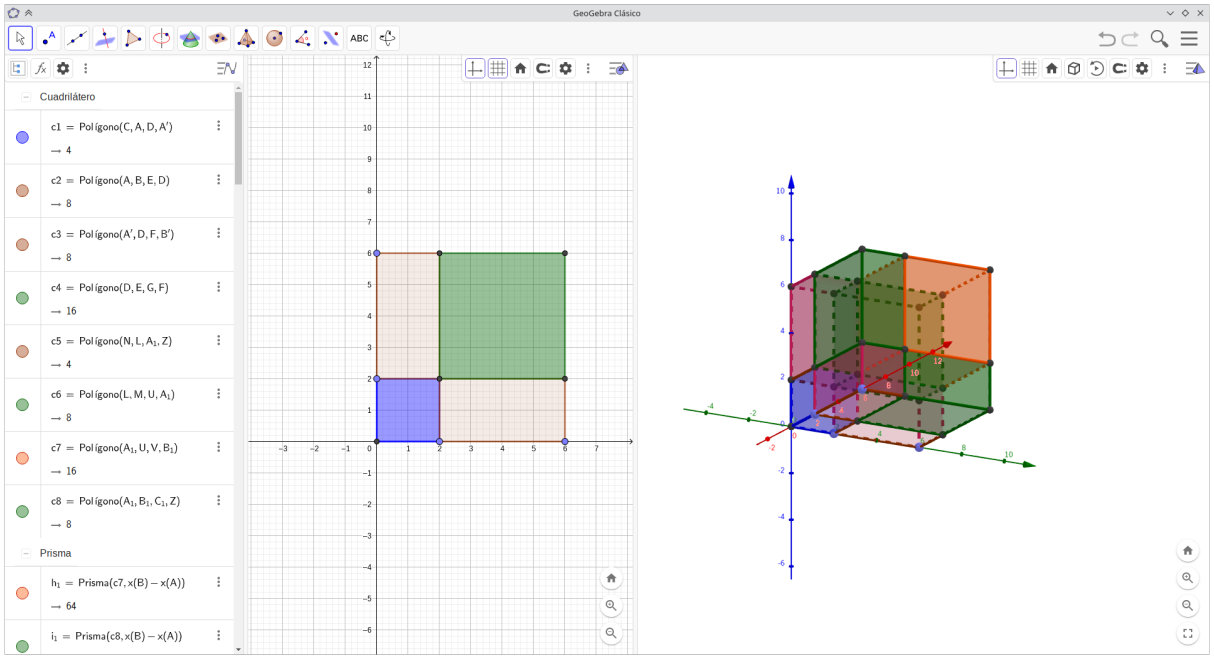


Figura 2.14: Se utilizó la vista gráfica en 2D para obtener primero el cuadrado de un binomio (con puntos dinámicos) y luego, sobre esa base, construir los prismas en la vista 3D. Los colores sirven para diferenciar cada «caja», que corresponden a los términos de la fórmula $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$.

2.1.3. Sistemas de Ecuaciones

Nombre: Un problema de encuentro.

Resumen: Mediante un clásico problema de encuentro entre dos móviles se introduce el tema «Sistemas de Ecuaciones», utilizando el concepto de intersección entre dos conjuntos como solución del sistema.

Objetivo: Entender que múltiples ecuaciones con iguales variables generan un sistema que puede tener, o no solución única

Saberes: Ecuaciones. Gráficos cartesianos. Funciones lineales.

Edad: 13 a 15 años.

Preparación: En la etapa de validación se trabaja el problema con *GeoGebra* desde lo gráfico, haciendo uso de puntos móviles. Es necesario que el docente sepa utilizar la intersección entre dos objetos, recta perpendicular y configuración visual de estilos. Opcionalmente se hace uso del módulo CAS, finalizando la actividad.

Planteo

Dos motociclistas salen desde ciudades opuestas para encontrarse en algún lugar de la ruta. Uno sale de la ciudad A hacia la B a una velocidad de $50km/h$. El otro sale de la ciudad B hacia la A a una velocidad de$70km/h$. Si la distancia entre las dos ciudades es de $600km$, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse y a qué distancia de cada ciudad se encontrarán?

Preguntas orientadoras: ¿Existe alguna fórmula que relacione espacio/velocidad/tiempo?, ¿qué significa que las dos ciudades estén a $600km$ de distancia?

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema trata sobre dos motociclistas que salen de distintas ciudades, A y B, a diferentes velocidades, $50km/h$ y $70km/h$. Se supone que en algún momento se encontrarán en el camino, ya que van por una misma ruta pero en sentidos opuestos. Se pregunta por el lugar en que los dos ciclistas se encuentran y en qué momento sucederá ésto.
   Una vez identificados los datos y las incógnitas el docente podrá motivar a que los alumnos confeccionen un esquema de la situación.

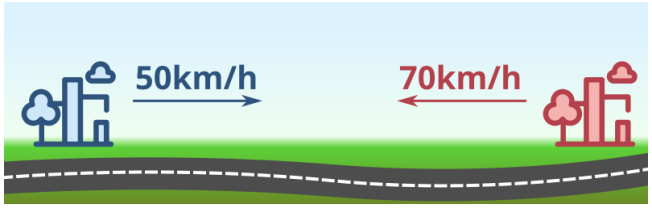


Figura 2.15: Esquema del camino que tienen que recorrer cada motociclista. Las flechas indican el sentido de cada vehículo. En algún lugar entre las ciudades A y B se deberán encontrar. Imágenes de SVGREPO.

2. *Pensar una estrategia*: Se espera que los alumnos puedan asociar (o recordar quizás de alguna clase de física) la relación entre el «espacio», «tiempo» y «velocidad». En este sentido el docente podrá preguntar sobre cuál es la unidad de medida de la velocidad en el problema, anotando en el pizarrón la velocidad tal cual aparece en el problema:
   $V_A = 50km/h$
   El docente indagará sobre la unidad de medida de velocidad (km/h), motivando a que el alumnado resuelva que la unidad de medida km hace referencia al espacio recorrido ($50km$), en tanto h es tiempo en que lo recorre ($1h$), esto quiere decir que la moto hace $50km$ en intervalo de tiempo de 1 hora. Entonces:
   $v = \frac{e}{t}$

Hará lo propio sobre la distancia entre ambas ciudades y también respecto a cuál es la condición que debe darse en el punto de encuentro. Se espera que los alumnos respondan que al llegar a dicho punto las distancias recorridas por ambos motociclistas sumen $600km$. Es decir que:
$e_1 + e_2 = 600$
Es posible que las estrategias que surjan sean: por tanteo, tablas de relación o solución algebraica. Aunque es probable que esta última, mediante ecuaciones, no llegue a su resolución dada la complejidad del problema y que precisamente no poseen los algoritmos de resolución de sistemas de ecuaciones.

3. *Ejecutar el plan:* La solución por tanteo se podrá dar mediante el siguiente razonamiento:
   • El tiempo de viaje será el mismo en todo momento si comienzan su recorrido a la vez.
   • Los espacios recorridos por cada motociclista son distintos, porque van a velocidades diferentes.
   • La suma de las distancias tiene que dar 600, ni más ni menos.
   Para ayudar a ordenar los cálculos el docente les propondrá armar una tabla como la siguiente en la hoja de cálculo de *GeoGebra*:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Hora:	1	2	3	4	5	6	7	
2	Moto A	50	100	150					
3	Moto B	70	140	210					
4	A + B	120	240	360					
5									

Figura 2.16: La tabla posee los espacios recorridos por las motos A y B a 1 hora, 2 horas, 3 horas, etc.

La tabla podrá ser manual, o con cálculos automatizados por celda. En este último caso se trabaja de igual forma que en una planilla de cálculos estándar, utilizando las coordenadas de casilleros para obtener los resultados. Por ejemplo, para obtener el resultado del espacio recorrido en la segunda hora se introdujo en la celda $C2$ la fórmula $\$B2 * C1$, de esta forma luego se puede copiar hacia la derecha bloqueando la casilla $B2$. Para obtener el total en la última fila de la primera hora se introdujo en $B4$ la fórmula $B2 + B3$.
Al finalizar la tabla observamos que cuando los dos vehículos alcanzan las 5 horas de viaje, la suma de sus distancias recorridas es exactamente $600km$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Hora:	1	2	3	4	5	6	7	
2	Moto A	50	100	150	200	250	300	350	
3	Moto B	70	140	210	280	350	420	490	
4	A + B	120	240	360	480	600	720	840	
5									

Figura 2.17: La tabla posee valores calculados para hasta 7 horas de viaje. Sin embargo la solución del problema aparece antes, a la quinta hora, donde está la celda remarcada.

4. *Verificar y repensar la solución*: Es posible verificar que el tiempo de viaje y las distancias recorridas son coherentes con el problema.
   • El móvil que parte de A recorre $250km$ $(50km/h \times 5h)$
   • El móvil que parte de B recorre $350km$ $(70km/h \times 5h)$
   • La suma de sus recorridos es igual a la distancia entre las dos ciudades $600km$ $(250km + 350km)$

Validación

Una vez resuelto el problema, el docente propondrá trabajar en *GeoGebra* con las ecuaciones planteadas inicialmente. Buscará que los alumnos entiendan la relación entre las variables, que son tres:

- El espacio recorrido por el vehículo A, llamado e_1;
- El espacio recorrido por el vehículo B, llamado e_2; y
- El tiempo que emplean los vehículos hasta el punto de encuentro, que es igual en ambos, al que llamamos t.

El profesor se apoyará en la fórmula de velocidad escrita en el pizarrón: $v = \frac{e}{t}$, por lo que con un pasaje de términos es equivalente a $e = v \times t$. De esta forma podemos escribir las ecuaciones de espacio para cada vehículo:

- $e_1 = 50t$
- $e_2 = 70t$

Al ingresar esas ecuaciones en GeoGebra nos queda graficado de la siguiente manera:

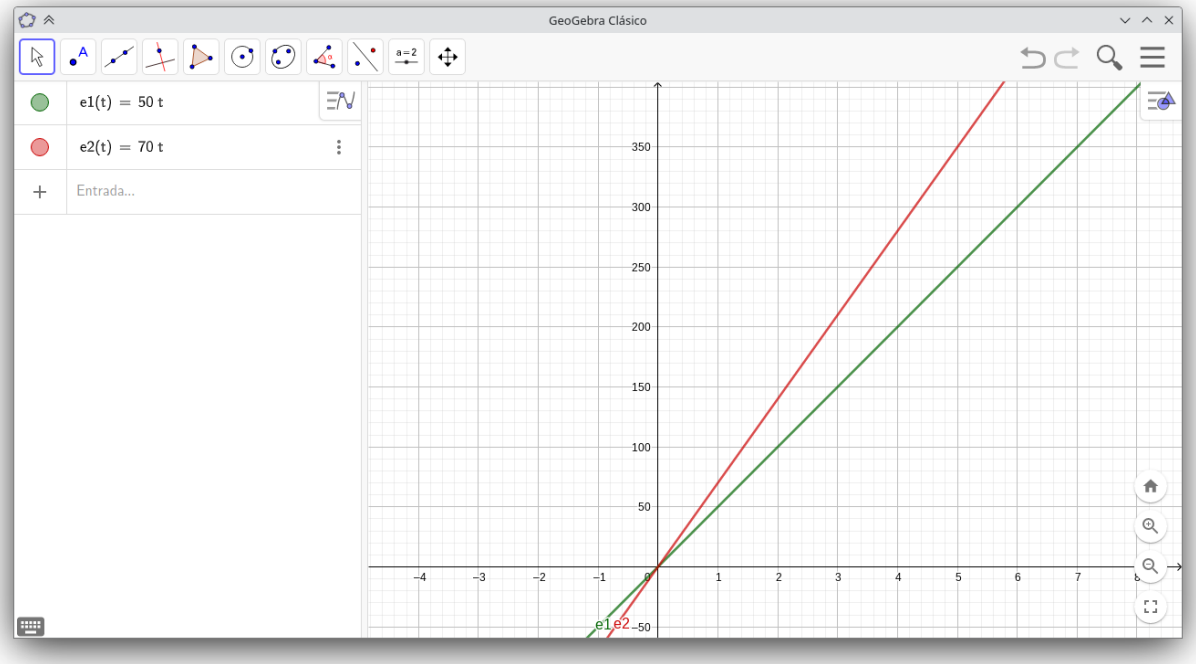


Figura 2.18: Al ingresar las ecuaciones en *GeoGebra* el programa reconoce la relación funcional entre variables.

En la imagen se observan las dos gráficas de cada ecuación (funciones en t como variable independiente). Se reconoce también un cambio de escala entre ejes, para visualizar mejor los valores que se quieren analizar $(1 : 50)$.

Ahora creará un punto sobre el eje de las abscisas y una perpendicular el mismo sobre el punto creado. Luego, con la herramienta de intersección, marcará los puntos correspondientes al contacto con las ecuaciones originales.

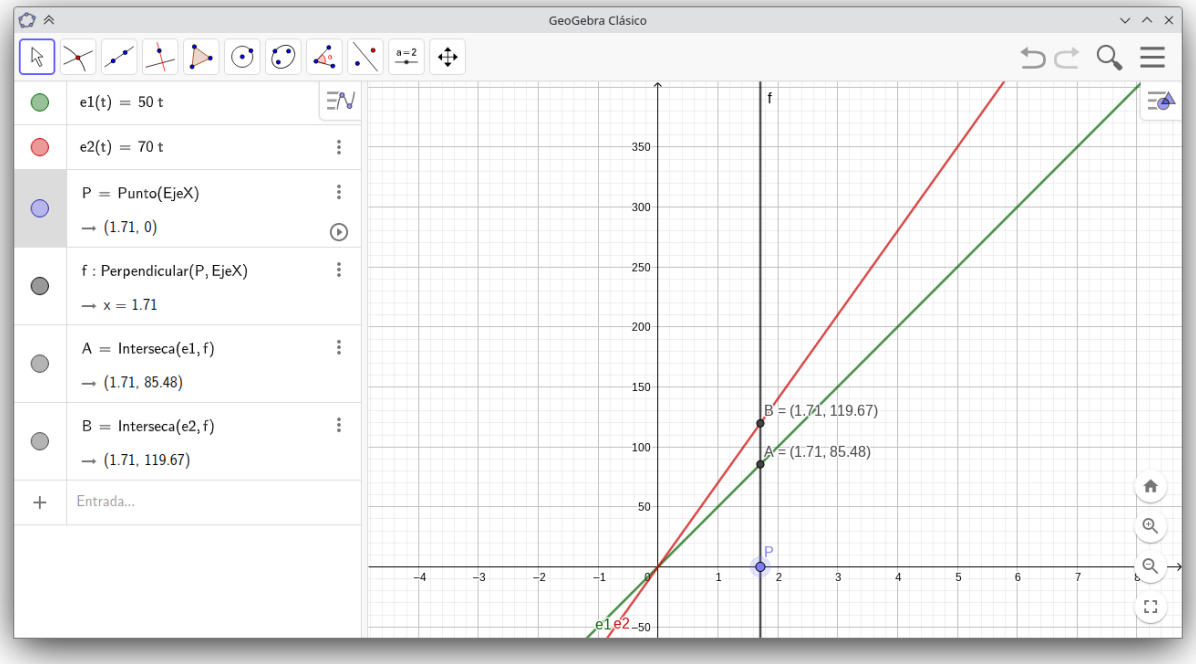


Figura 2.19: El punto P se desliza sobre la recta horizontal que representa la variable del tiempo. Al desplazarse arrastra los puntos A y B, que son las intersecciones con las rectas.

Ahora el maestro les pedirá a los alumnos que interpreten las coordenadas de los puntos de intersección A y B, esperando que ellos respondan que la coordenada del eje horizontal es el tiempo transcurrido y la coordenada en el eje vertical es el espacio recorrido por el móvil en ese tiempo.

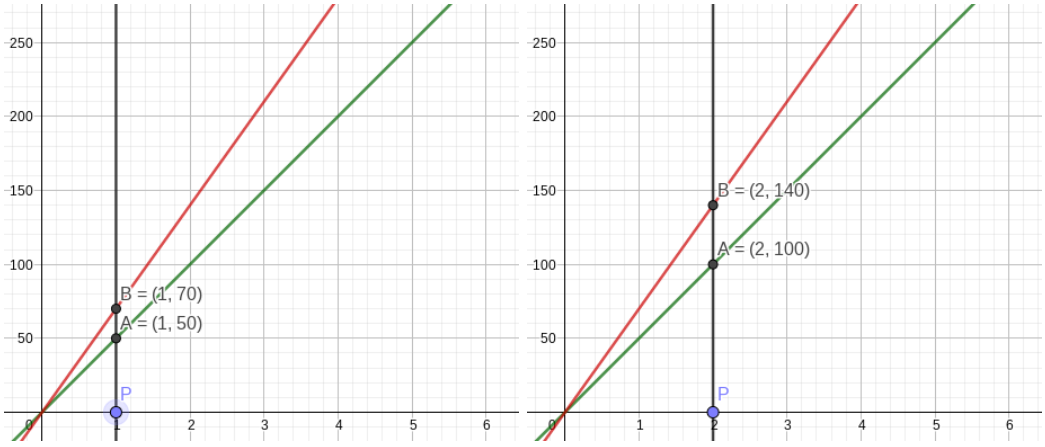


Figura 2.20: En la imagen de la izquierda el punto deslizador P en $1h$ indica que en ese tiempo los móviles recorrieron $50km$ y $70km$ cada uno. A la derecha, el punto P en $2h$ indica $100km$ y $140km$ para los móviles A y B respectivamente.

Finalmente el docente les indicará que lleven el punto P a la solución hallada anteriormente, es decir a $t = 5$. Observarán que los espacios recorridos por cada móvil suman $600km$, validando su respuesta anterior mediante la gráfica[2].

A continuación el profesor realizará la comprobación algebraica completando el sistema y aplicando sustituciones:

[2]Es importante notar que el punto de encuentro no se da necesariamente en la intersección de las dos funciones graficadas (donde $e1 = e2$), sino en el valor de tiempo t para el cual la suma de las distancias recorridas por ambos móviles es igual a 600.

1. $e_1 = 50t$
2. $e_2 = 70t$
3. $e_1 + e_2 = 600$

Sustituyendo en (3) las ecuaciones (1) y (2) nos queda:
$50t + 70t = 600$
Y despejando el valor de t resolvemos:
$120t = 600$
$t = 600/120$
$t = 5$
Luego, reemplaza este valor en las ecuaciones (1) y (2):
$e_1 = 50(5) \Rightarrow e_1 = 250$
$e_2 = 70(5) \Rightarrow e_2 = 350$
El docente deberá asegurarse de que los alumnos comprenden correctamente el proceso de sustitución de variables, ya que luego deberán aplicarlo en los algoritmos de solución de sistemas de ecuaciones por el método de igualación y de sustitución.

En este proceso es necesario que quede claro que cada ecuación es independiente y produce soluciones en forma de pares ordenadas por sí misma. Pero que al hacerlas trabajar en conjunto producen una única solución que las vuelve «compatibles».

Formalización

Una vez entendido el concepto de que las ecuaciones conforman un sistema el docente hará la presentación formal del tema, definiendo los «Sistemas de Ecuaciones lineales con dos incógnitas»:

> Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos ecuaciones, cada una con las mismas variables (como e_1, e_2 y t en nuestro caso) y donde las variables están elevadas a la potencia uno. En general los sistemas de este tipo suelen tener dos variables o incógnitas (generalmente x e y) y están compuestas por dos ecuaciones.
>
> Los sistemas también pueden ser no lineales y poseer una o más variables elevadas a una potencia entera superior a uno. También puede suceder que tengan distinta cantidad de variables que de ecuaciones, produciendo distintos tipos de sistemas que se verán más adelante.

El docente también pondrá en relieve cuál es el objetivo de reconocer un sistema como modelo:

> Resolver un sistema significa encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente. Gráficamente, si cada ecuación representa una recta (cuando hablamos de ecuaciones lineales), entonces la intersección entre ellas (si existe) es la solución del sistema.

Se podrá mostrar una diversidad de casos gráficos para hacer la introducción formal de los Sistemas Compatibles (SC) e Incompatibles (SI), y en el primer caso si son Determinados (SCD) o Indeterminados (SCI).

Luego se explicará el algoritmo de resolución mediante los métodos de igualación y sustitución (pertenecientes a la misma familia de lógica algebraica), y por último se podrá explicar el método de solución por reducción de sumas y restas. En este sentido, el módulo *CAS* de *GeoGebra* puede resultar muy útil. A continuación se muestra cómo podría trabajarse utilizando la cita de renglones de dicho módulo

Resolución por el método de Sumas y Restas utilizando el módulo CAS:

1. Anotamos las ecuaciones en el módulo CAS, una por renglón

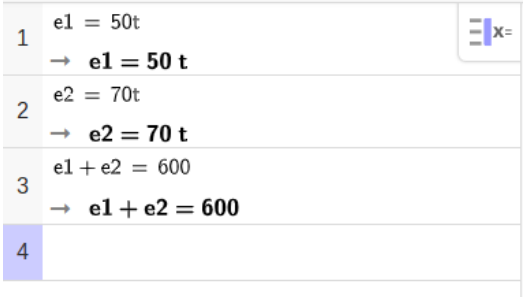


Figura 2.21: Es importante que cada ecuación esté bien escrita.

2. Observamos que en la ecuación #3 están las variables $e1$ y $e2$, entonces le decimos al programa que a ese renglón le reste los renglones #1 y #2:

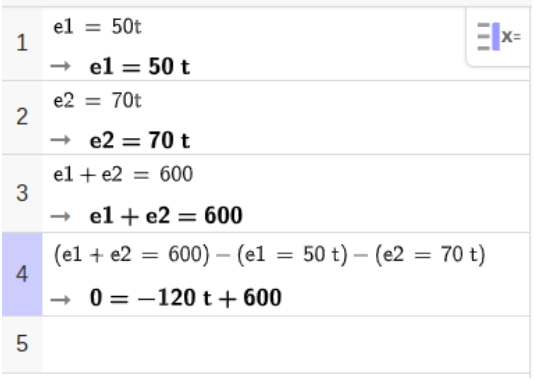


Figura 2.22: En el cuarto renglón se ingresó el comando $\#3 - \#1 - \#2$.

3. La ecuación resultante es una combinación lineal de todas, donde solo queda la variable t como única incógnita. Luego es fácil resolverla
   $120t = 600$
   $t = 600/120$
   $t = 5$

4. Por último, conocido el valor de t se lo reemplaza en las dos primeras ecuaciones, obteniendo los valores de $e1$ y $e2$:
   $e1 = 50 \times 5 \Rightarrow e1 = 250$
   $e2 = 70 \times 5 \Rightarrow e2 = 350$

Una vez avanzados los alumnos en las prácticas de los métodos de resolución el docente podrá explicar que GeoGebra posee tanto en la entrada de la Vista Algebraica como en el módulo CAS el comando «resuelve()» que permite encontrar las soluciones de un sistema de forma directa:

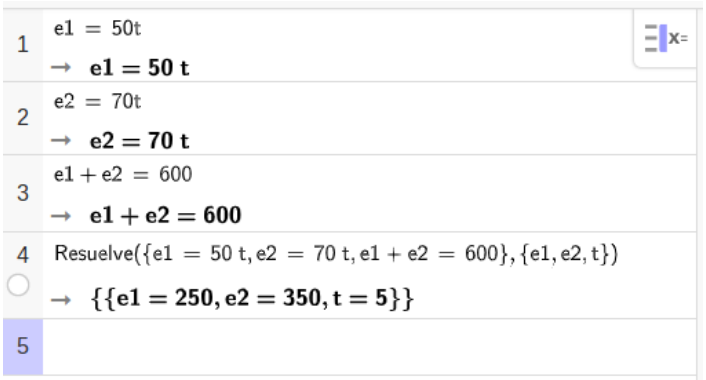


Figura 2.23: En el renglón se ingresó $Resuelve(\{\#1, \#2, \#3\}, \{e1, e2, t\})$. Es decir, los argumentos del comando son lista con las ecuaciones y la lista con las variables.

El comando es especialmente útil para verificar la solución de un sistema de forma rápida y precisa.

Por último el docente podría reforzar que, si bien hay tres variables en juego (e_1, e_2, t), el proceso didáctico apunta a reducirlas a un sistema de dos incógnitas, así también podrían utilizarse las variables x e y, haciendo referencia a tiempo y espacio respectivamente:

1. $y = 50x$
2. $y = 600 - 70x$

En la segunda ecuación, a la distancia total $(600km)$ se le resta el espacio recorrido por el otro móvil siendo el tiempo es el mismo para ambos móviles. En general los problemas de encuentro, como el planteado en esta secuencia, se plantean de esta forma.

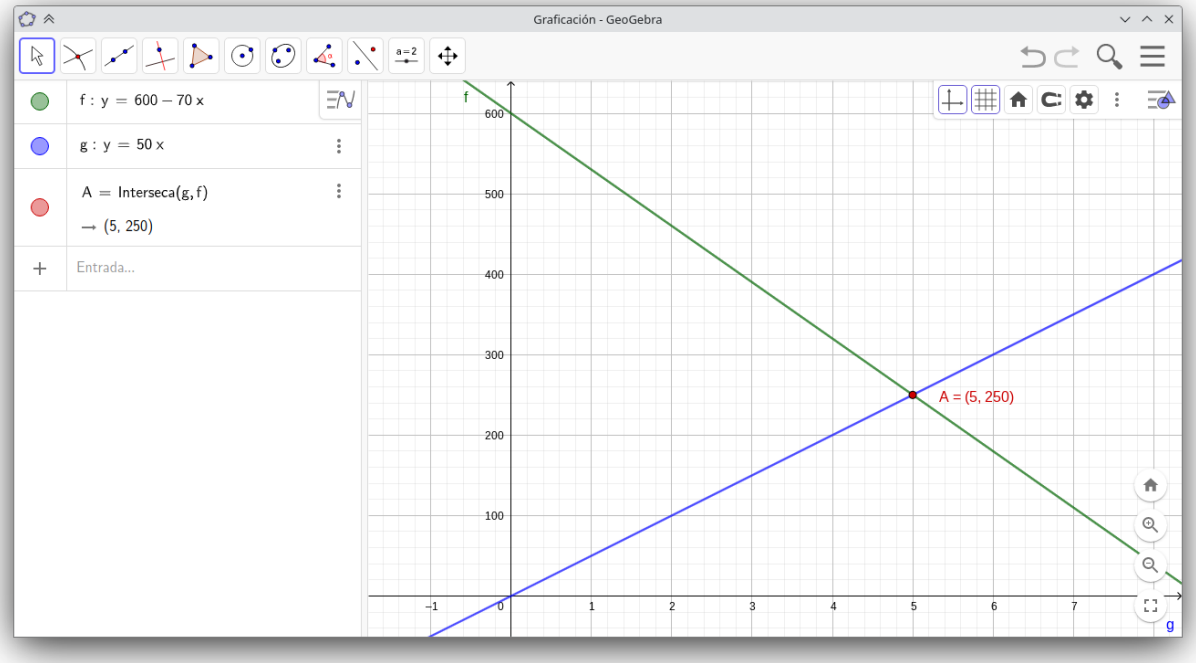


Figura 2.24: La interpretación gráfica de este sistema es fácil de comprender, en azul la ecuación de espacio del primero de los móviles, en verde el segundo de ellos que parte desde los $600km$ de distancia, descontando espacio hacia el punto de encuentro (A).

2.2. Funciones

2.2.1. Ejes cartesianos

Nombre: Batalla naval.

Resumen: La adaptación del clásico juego de mesa «Batalla Naval» actúa en esta actividad como soporte para introducir el concepto de sistema de ejes cartesianos, y mediante acciones lúdicas los alumnos practican la localización de coordenadas.

Objetivo: Introducir los sistemas de ejes cartesianos y la nomenclatura de los pares cartesianos.

Saberes: Números Naturales, Números Enteros, distancia.

Edad: 12 a 13 años.

Preparación: Se presenta un juego similar al clásico de «batalla naval», utilizando *GeoGebra* como tablero. Si nunca se ha jugado a este juego, quizás convenga hacerlo antes de comenzar con esta adaptación.
Se requiere que el docente posea la habilidad de poder explicar rápidamente cómo cambiar estilos de puntos y que prepare la interfaz del programa para que se visualice solo el primer cuadrante de la forma en que se observa en las figuras que se muestran a continuación.

Planteo

Se presenta a los alumnos una adaptación del juego «batalla naval», pero utilizando *GeoGebra* como tablero. El juego puede responder a distintos niveles, de acuerdo al avance del grupo en contenidos. Algunas posibles configuraciones pueden ser las siguientes:

- Utilizar el primer cuadrante de 10×10 de forma que se familiaricen con el juego y el tablero.
- Avanzar con los ejes negativos incorporando los demás cuadrantes, tomando esta vez un rango de -5 a 5 en cada eje.

Las reglas del juego pueden ser las siguientes:

- Cada jugador utiliza *GeoGebra* en su propia pantalla, sin que el otro jugador lo vea.
- Se tienen por jugador 1 portaaviones (4 unidades), 1 crucero (3 unidades), 1 submarino (2 unidades), 1 lancha torpedera (2 unidades). Todos los navíos son puntos consecutivos en línea. Que deberán colocar en el tablero sin solapar o intersecar las líneas, de forma horizontal o vertical.
- Comienza el juego el jugador de menor edad, que tendrá la oportunidad en su turno de expresar un par de coordenadas, horizontal y vertical, para disparar su torpedo. El jugador oponente tendrá que decir si el torpedo cae sobre algún navío propio y en tal caso deberá decir «TOCADO», y además deberá decir qué clase de navío es. Si el torpedo no acierta a ningún navío, deberá pronunciar «AGUA».
- Habrá que definir las reglas sin ambigüedades, como por ejemplo si se permiten utilizar los bordes, tamaño del tablero, penalizaciones por indicar o marcar las coordenadas de forma incorrecta, etc.
- En cada turno se repite el procedimiento hasta que uno de los dos jugadores logra hundir todos los navíos del oponente, quien será el ganador de la batalla.

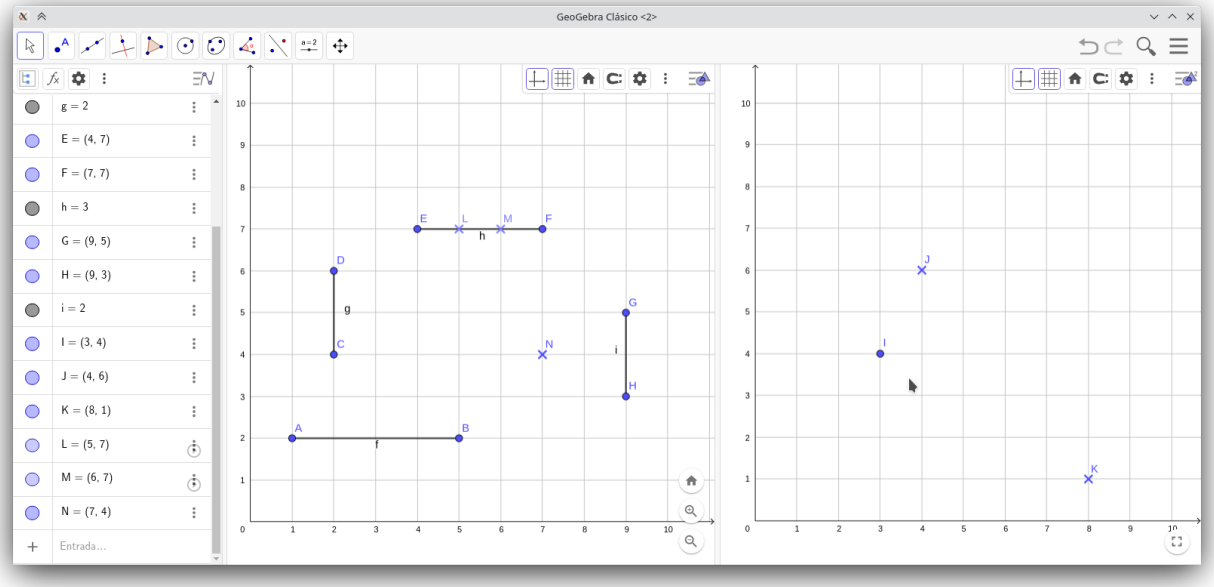


Figura 2.25: Posible configuración de jugadas. Se ha activado la segunda vista gráfica para ver los tiros realizados. Las cruces indican tiros acertados. Se pueden usar colores en lugar de símbolos.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: Al ser un juego, habrá que explicar bien las reglas, que deberán estar disponibles en todo momento para resolver cualquier duda al respecto.

2. *Pensar una estrategia*: Las estrategias son heredadas del juego original de la *Batalla Naval*, al principio los jugadores irán disparando en cada turno de forma aleatoria y si logran acertar a un navío tratarán de disparar en forma vertical u horizontal hasta terminar de hundirlo. Asimismo, al inicio de la partida es posible que los jugadores traten de colocar sus barcos en los bordes, pensando quizás en que exista una menor probabilidad de ser descubiertos allí.

3. *Ejecutar el plan:* El desarrollo del juego tendrá su cuota de azar, pero también de estrategia. Si se ha dado sobre un navío se buscará seguir disparando sobre los ejes perpendiculares que pasan por sobre el punto.

4. *Verificar y repensar la solución*: Al finalizar el juego se deberán mostrar los tableros y cotejar los disparos realizados. El docente deberá intervenir en caso de discrepancias. Posiblemente surjan otras estrategias, como por ejemplo tratar de localizar todos los navíos y por último intentar hundirlos.

Validación

Lo primero que deberemos validar son los casos de éxito, donde los participantes podrán indicar a la clase qué estrategias utilizaron. Luego habrá que repasar aquellos casos donde hubo algún error en el dictado o interpretación de las coordenadas, siendo muy común la inversión de ellas (x por y, viceversa).

El docente indagará si los alumnos respetaron el orden indicado para indicar los disparos, a sabiendas de que en las reglas se especifica primero horizontal y luego vertical.

Además se podrán proponer variantes de juego:

- Si se ha jugado con el tablero de enteros positivos, se podrá proponer el tablero con números negativos.
- Formar competencias 2 contra 2, de forma que cada integrante del equipo pueda decidir en su turno los movimientos a realizar.
- Modificar el rango del tablero.
- Cambiar las longitudes de los barcos, o inclusive utilizar rectángulos de $1xN$ para ellos.
- Cambiar la regla de hundimiento del barco a una cierta cantidad de disparos acertados.

- Establecer un número *máximo* de disparos por bando, de forma que gana quien más aciertos tiene.
- Dar puntaje a cada barco hundido y que el tiempo defina la finalización de la batalla.

Formalización

Al finalizar el juego se deberán formalizar:

- Definiciones: Ejes cartesianos (eje de las abscisas y ordenadas) su estructura ortogonal, sentido de crecimiento (de izquierda a derecha, de abajo hacia arriba), par ordenado (coordenadas) y cuadrantes,.
- Nomenclaturas: Es importante destacar que, si bien la sintaxis de *GeoGebra* utiliza la coma para separar las coordenadas, en la nomenclatura formal el principio fundamental institucionalizado es el orden de los valores (abscisa y ordenada) en el par ordenado, independientemente del separador gráfico o textual empleado.
- Algoritmos: Orden de representación de pares ordenados.

2.2.2. Introducción a las funciones

Nombre: Funciones gráficas.

Resumen: Mediante la observación del movimiento de un tren de juguete se exploran los conceptos de *dominio* e *imagen* asociados a tiempo empleado versus distancia recorrida, mientras la máquina da vueltas en la pista.

Objetivo: El objetivo de esta actividad es consolidar el entendimiento de la relación que existe entre la *variable independiente* y la *variable dependiente*, así como formalizar las definiciones de los conjuntos de *Dominio* e *Imagen*.

Saberes: Sistemas de ejes cartesianos, pares cartesianos, distancia, relaciones, introducción a las funciones.

Edad: 12 a 13 años.

Preparación: La situación-problema requiere que el docente sea capaz de reformular las preguntas de diferentes formas para que el alumnado pueda llegar a la interpretación correcta en cada una de ellas. Quizás sea conveniente que el docente prepare las distintas gráficas que figuran en la actividad para mostrarlas a medida que se vayan necesitando.

Planteo

Mariela y Pancho armaron una pista circular de un tren de juguete sobre la mesa del comedor. En la pantalla LED del control del tren hay una gráfica que corresponde a la distancia en pista del tren respecto de su punto de partida, donde el eje horizontal representa el tiempo empleado por el tren en su recorrido, el eje vertical la distancia lograda en dicho tiempo, y el punto en azul la ubicación del tren en cada momento.

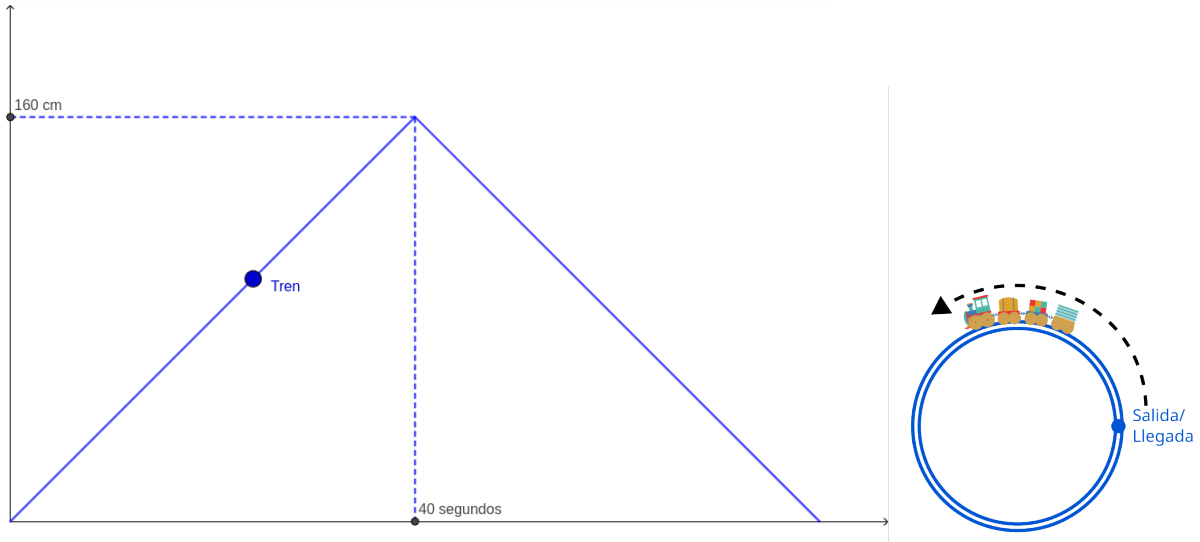


Figura 2.26: La imagen del tren se obtuvo de la página de *FreePik©* bajo licencia libre.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Puedes describir qué muestra la pantalla LED?
2. ¿Cuánto tarda el tren en dar una vuelta? ¿Cuántos centímetros recorre en una vuelta?
3. ¿Qué significa el pico más alto de la gráfica? ¿Puedes calcular la distancia a la salida que tiene el tren a los 20 segundos? ¿Y a los 60 segundos?
4. ¿Cómo sería la gráfica si el tren diera 3 vueltas? ¿Puedes graficarla?

5. El tren tiene un control de velocidad que lo hace ir el doble de rápido, ¿Cómo será su gráfica para 3 vueltas?

6. ¿Cómo sería la gráfica del tren a una vuelta si el tren parara 20 segundos justo en el punto opuesto a la salida?

7. ¿Te imaginas cómo puede ser la gráfica para un tren que da vueltas en sentido contrario?

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: La actividad plantea analizar una gráfica que indica el tiempo empleado por un tren de juguete y la distancia recorrida desde su salida. Estos datos se grafican en la pantalla LED del control del tren, en el eje horizontal y vertical respectivamente. Hay que interpretar la gráfica para responder una serie de preguntas que indagan sobre la posición del tren de juguete.

2. *Pensar una estrategia*: El problema está planteado de forma tal que las preguntas van guiando la actividad, acotando las estrategias que pueden realizarse. Entre las estrategias que podemos anticipar puede ser la realización de tablas de valores y anotaciones adicionales en la gráfica. A partir de la tercera pregunta se necesita realizar nuevas gráficas, por lo que se podrá optar por la utilización de *GeoGebra* para marcar puntos y segmentos.

3. *Ejecutar el plan:* Trataremos de ir respondiendo las preguntas utilizando *GeoGebra*:
   ¿Puedes describir qué muestra la pantalla LED? Se espera que al responder esta pregunta, los alumnos, expresen con sus palabras la relación tiempo-distancia de la posición del tren. El docente deberá hacer preguntas que les permita a los alumnos hacer una diferenciación entre distancia y recorrido. Una de las cosas más difíciles de interpretar aquí es la transformación del recorrido del tren en una curva circular hacia la gráfica rectilínea, donde a los 40 segundos alcanza $160cm$ de distancia y luego comienza acercarse al final de su recorrido acortando la distancia hasta $0cm$.
   Es posible que algunos alumnos hagan una interpretación icónica de la gráfica, observando el pico como si de una montaña se tratara. El docente deberá guiar al alumnado para que puedan comprender la relación entre las variables: ¿Qué mide el *eje horizontal*? ¿qué mide el *eje vertical*?
   ¿Cuánto tarda el tren en dar una vuelta? ¿Cuántos centímetros recorre en una vuelta? La gráfica marca 40 segundos a $160cm$ en la mitad de su recorrido. Es posible que los alumnos realicen algunos esquemas o dibujos adicionales para poder hacer los cálculos.

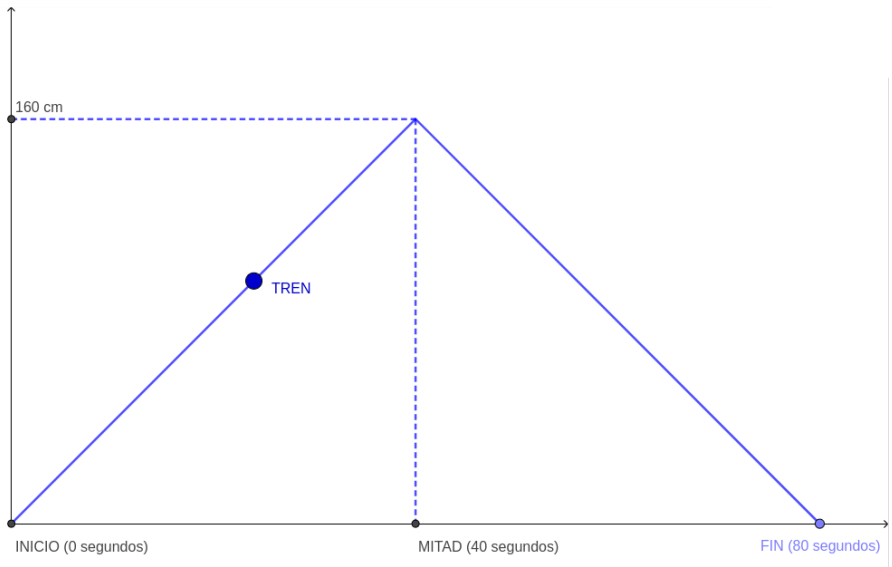


Figura 2.27: A la gráfica original se le agregaron algunos datos más que surgen al aplicar la lógica de que a iguales tiempos, iguales distancias.

El docente deberá indagar sobre si es lo mismo distancia recorrida que distancia en la gráfica, ya que la gráfica muestra que el tren termina la vuelta en 0cm, que es la distancia al punto de salida en la pista

circular. Con esto en mente, podemos decir que el tren recorre $160cm$ a los 40 segundos desde su origen hasta el lado opuesto de la pista, y luego vuelve a recorrer otros $160cm$ nuevamente hacia el punto de salida, es decir $320cm$ de recorrido en 80 segundos.
¿Qué significa el pico más alto de la gráfica? ¿Puedes calcular la distancia a la salida que tiene el tren a los 20 *segundos? ¿Y a los* 60 *segundos?* El pico más alto en la gráfica indica la posición del tren de juguete en el punto diametralmente opuesto de la isla, es la mayor distancia que puede tener el tren en la pista. La estrategia aquí pasa por poder identificar los hitos tanto en la gráfica como en la pista.

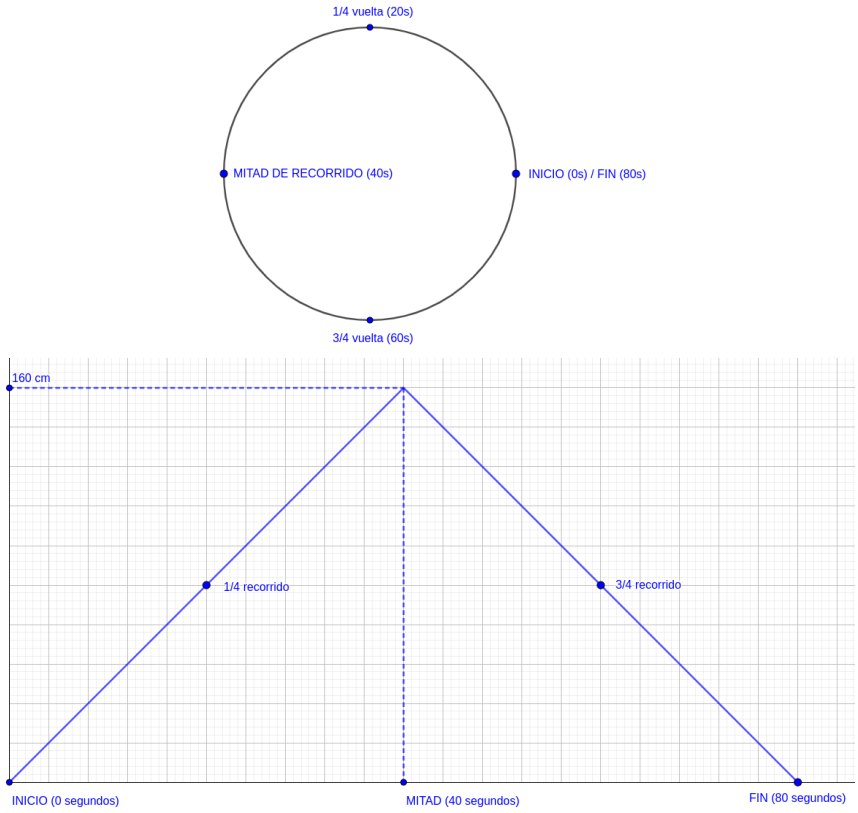


Figura 2.28: En la pista están marcados los hitos de 0, 20, 40, 60 y 80 segundos.

¿Cómo sería la gráfica si el tren diera 3 *vueltas? ¿Puedes graficarla?* Si cada vuelta dura 80 segundos, es lógico pensar que 3 vueltas durará 240 segundos. La gráfica será la repetición de una vuelta, una a continuación de la otra:

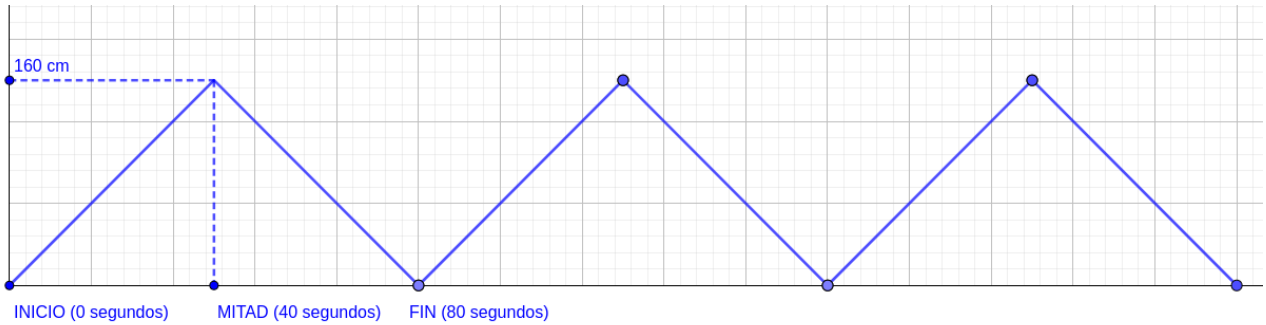


Figura 2.29: La gráfica ahora muestra 3 picos.

El tren tiene un control de velocidad que lo hace ir el doble de rápido, ¿Cómo será su gráfica para 3 *vueltas?*

Para responder a esta pregunta debemos hacernos la idea de que ahora la vuelta dura la mitad de tiempo respecto a que duraba originalmente, porque viaja al doble de velocidad:

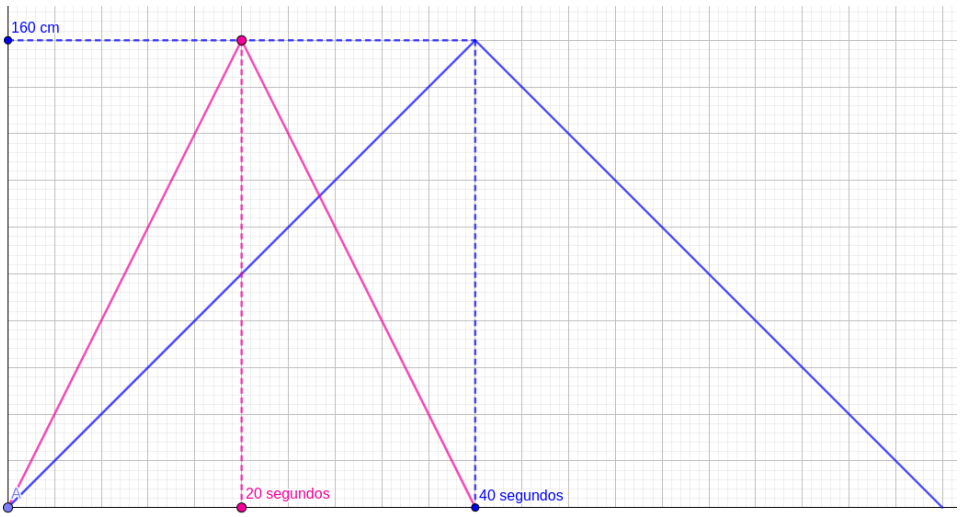


Figura 2.30: En la gráfica original (azul) de la pantalla a los 40 segundos el tren estaba en la mitad del recorrido, pero ahora al ir al doble de velocidad la mitad de recorrido se da a los 20 segundos (en rosa).

Para responder la segunda pregunta debemos aplicar esta misma gráfica 3 veces, consecutivas, llegando a 120 segundos en total (40 segundos, 3 veces):

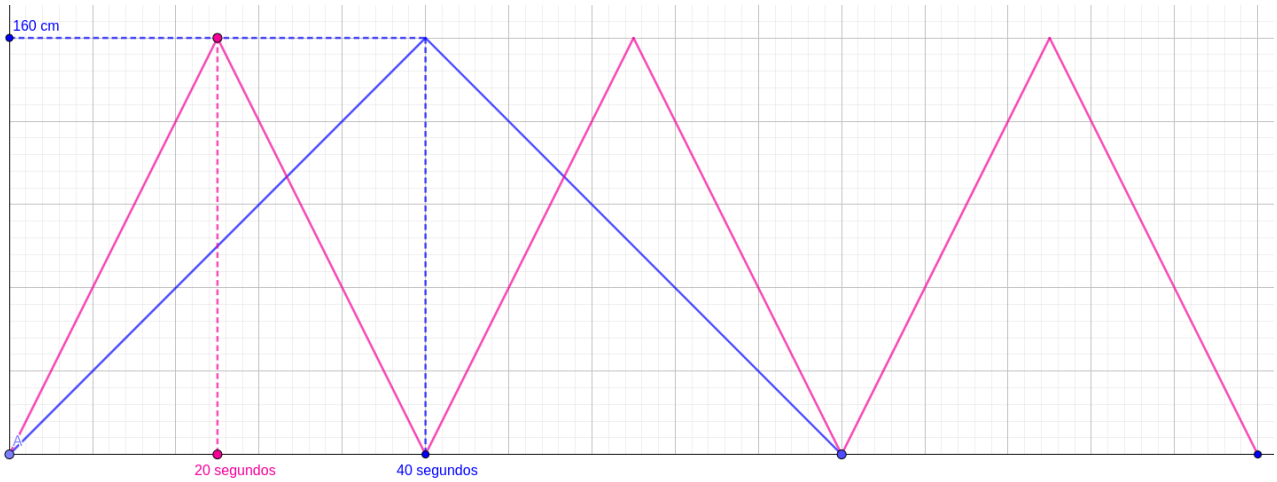


Figura 2.31: Es lógico que si el tren tardaba 240 segundos al dar 3 vueltas con la velocidad original, tarde ahora 120 segundos al doble de velocidad.

¿Cómo sería la gráfica del tren a una vuelta si el tren parara 20 *segundos justo en el punto opuesto a la salida?* Sabemos que el tren se aleja del punto de salida a medida que avanza por la pista, es decir, avanza en tiempo y distancia. Al llegar al punto diametralmente opuesto de la salida en pista se encuentra a $160cm$ de distancia del mismo. ¿Qué sucede con el tiempo si el tren para en ese punto? El tiempo no para, pero la distancia al punto de salida se mantiene en ese valor. La gráfica entonces quedará así:

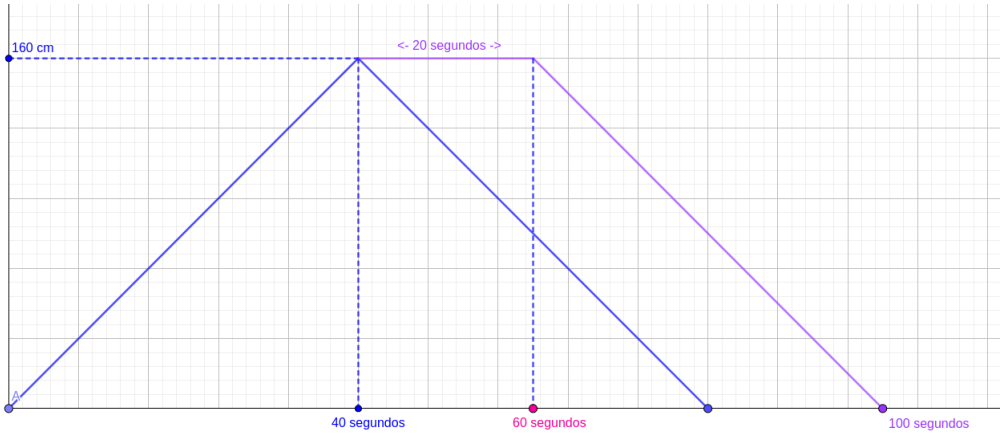


Figura 2.32: A los 40 segundos se extiende un segmento a 160 cm del punto de salida, por 20 segundos (violeta), luego arranca nuevamente tardando otros 40 segundos en volver al punto de llegada (violeta).

¿Te imaginas cómo puede ser la gráfica para un tren que da vueltas en sentido contrario? Para contestar esta pregunta debemos reinterpretar el problema, atendiendo siempre la definición de distancia, que es siempre positiva. Entonces, al dar vuelta en sentido contrario las gráficas no se modifican porque lo que se relaciona en la pantalla LED es distancia y tiempo.

4. *Verificar y repensar la solución*: Siendo este una situación problemática con varias preguntas secuenciadas, es posible que no existan muchas estrategias diferentes de resolución. Si el problema se trabajó de forma grupal, entonces el docente deberá ir revisando las actuaciones de cada grupo para que en este paso puedan exponer sus argumentos, pregunta a pregunta. Como siempre, es recomendable localizar aquellos grupos donde las respuestas han sido erróneas en todo o en parte para que otros grupos puedan contra argumentar y de esa forma comprender dónde está el error.

Validación

Este tipo de problemas, con preguntas orientadas, permiten retomar la resolución y avanzar en el objetivo didáctico del problema, que en este caso es poder introducir las relaciones entre dos conjuntos (tiempo y distancia) como una función. El docente deberá retomar cada una de las preguntas y a partir de ellas ir elaborando conceptos, nociones y definiciones.

La primer pregunta hace referencia al concepto de función, la respuesta dada a «¿Puedes describir qué muestra la pantalla LED?» apunta a la relación funcional entre tiempo y distancia. El docente deberá destacar por un lado la dependencia de la distancia respecto al tiempo, y a la vez tendrá que indagar sobre la naturaleza variable tanto del tiempo como de la distancia. Como es sabido, para describir una función de forma completa, es necesario definir el conjunto Dominio (80 segundos es el tiempo que tarda en dar una vuelta) como el conjunto Imagen (distancia de 0 a $160cm$).

La segunda pregunta apunta a reconocer pares de valores de la función, «¿Qué significa el pico más alto de la gráfica? ¿Puedes calcular la distancia a la salida que tiene el tren a los 20 segundos? ¿Y a los 60 segundos?», donde a distintos valores de Dominio se obtiene igual Imagen. Aquí el docente podrá indagar a los alumnos sobre otros valores en el eje horizontal, de forma que ellos puedan identificar las imágenes correspondientes.

Las preguntas tercera y cuarta tienen como objetivo redefinir el dominio: «¿Cómo sería la gráfica si el tren diera 3 vueltas? ¿Puedes graficarla?», «El tren tiene un control de velocidad que lo hace ir el doble de rápido, ¿Cómo será su gráfica para 3 vueltas?».

La quinta pregunta modifica la forma de la función, haciendo uso de un tramo horizontal que luego podrá ser formalizado como función constante, «¿Cómo sería la gráfica del tren a una vuelta si el tren parara 20 segundos justo en el punto opuesto a la salida?».

Por último, la pregunta «¿Te imaginas cómo puede ser la gráfica para un tren que da vueltas en sentido contrario?» es una pregunta que generará cierta confusión entre el alumnado, porque es posible que algunos argumenten que la gráfica debe cambiar de alguna manera, quizás tomando valores negativos en el eje vertical u horizontal.

Formalización

La validación de cada respuesta dada permitirá finalizar la clase con la correspondiente formalización de conceptos y definiciones. Aquí se podrá formalizar la definición de función como una relación entre dos conjuntos, uno de salida y otro de llegada, y una regla (en esta caso distancia dependiente del tiempo empleado por el tren) en la cual se verifica que a cada valor perteneciente al Dominio le debe corresponder uno y solo uno del conjunto de llegada.

Se definirán *Dominio*, *Codominio* e *Imagen* usando como ejemplo los conjuntos del problema.

Se recomienda utilizar alguna gráfica como la siguiente para mostrar los conjuntos *Dominio* e *Imagen*:

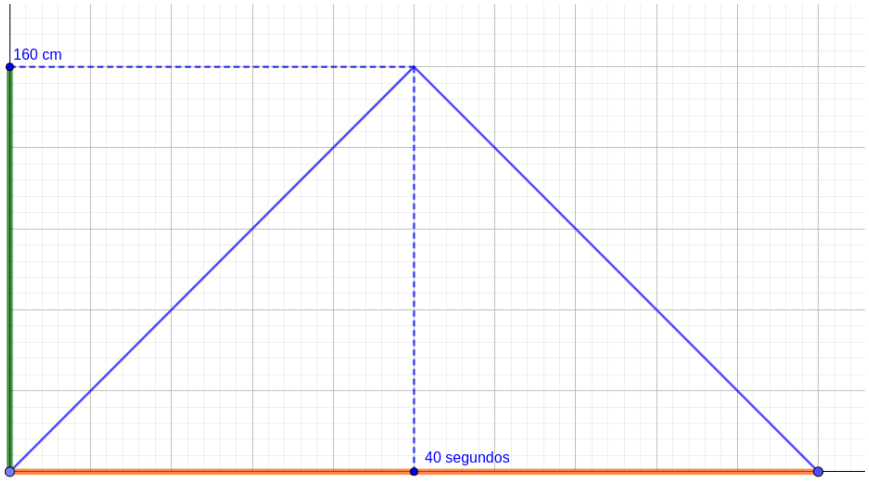


Figura 2.33: Emplear segmentos de colores para *Dominio* (naranja) e *Imagen* (verde) puede ser útil para visualizar el acotamiento de los mismos.

Es importante destacar que las funciones contextualizadas en situaciones problemáticas realistas habitualmente están acotadas en ambos extremos, a diferencia de las funciones abstractas a las que estamos acostumbrados en las clases teóricas de matemática donde, por ejemplo, una función lineal toma valores infinitos en todo su *Dominio* e *Imagen*.

A partir de aquí, y aprovechando las gráficas obtenidas se podrá comenzar a trabajar con las funciones *afines* y *constantes*.

2.2.3. Análisis gráfico de funciones

Nombre: Registros de temperatura y humedad.

Resumen: Con esta actividad se busca comprender completamente el análisis gráfico de funciones desde un ejemplo de registros de temperatura y humedad recolectados en 24 horas. En el problema, cada pregunta busca dar sentido a cada uno de los conjuntos a analizar.

Objetivo: Conceptos de conjuntos *Dominio* e *Imagen*, *Máximos* y *Mínimos relativos* y *absolutos*, *Crecimientos* y *Decrecimientos*, *Raíces* o *Ceros*, *Positividad* y *Negatividad*. Inecuaciones. Intervalos.

Saberes: Sistemas de ejes cartesianos, pares cartesianos, concepto de función, funciones gráficas, promedio o media.

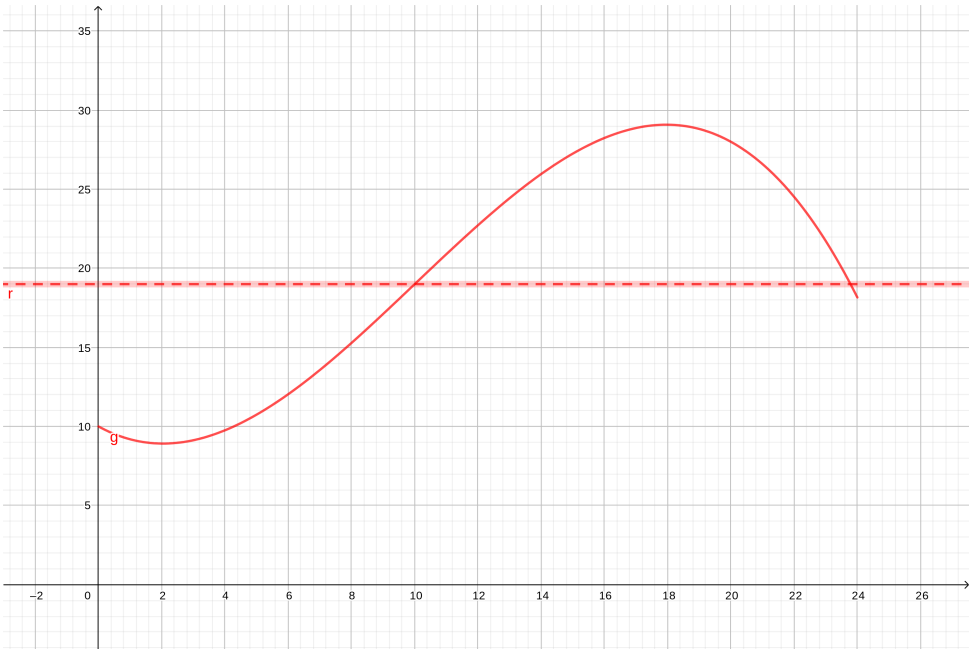
Edad: 12 a 14 años.

Preparación: El docente deberá estar atento a que los alumnos ingresen correctamente las dos funciones polinómicas, ya que cualquier error de tipeo provocará otra grafica, distinta a la planteada originalmente, en consecuencia el análisis no coincidirá con lo planificado. En este problema se grafican las funciones mediante el comando *Función*(), esto es especialmente útil para mostrar su gráfica acotada.

Planteo

Las gráficas muestran la temperatura y humedad de un día soleado de octubre cerca de la latitud 33° del hemisferio Sur en América. Las dos gráficas detallan en un período de $24hs$ cómo fueron variando los registros de temperatura y humedad. También se marcan en cada gráfica las temperaturas (Tp) y humedad (Hp) promedio registradas ese mismo día en años anteriores: $Tp = 19°C$ y $Hp = 45\,\%$.

Las funciones que dan origen a las gráficas son $H(x) = -0.01x^3 + 0.3x^2 - 1.1x + 10$ y $T(x) = 0.03x^3 - 1.1x^2 + 8.2x + 55$, acotadas entre 0 y 24 horas.



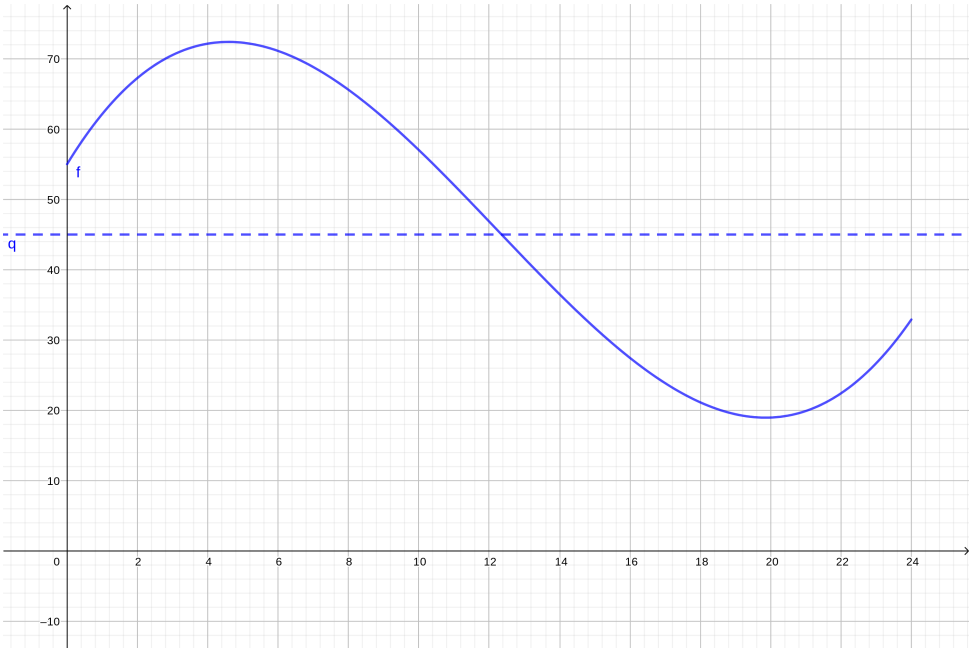


Figura 2.34: Gráficas de Temperatura «g» (roja) y Humedad «f» (azul), promedio.

Observando la gráfica y ayudándote con herramientas de *GeoGebra* responde las siguiente preguntas:

1. ¿Desde qué hora a qué hora se registraron datos de ambos fenómenos? ¿Qué valores de temperatura y humedad se registraron?

2. ¿Cuáles fueron las temperaturas máximas y mínimas registradas? ¿Cuáles fueron los valores de humedad máxima y mínima registrados? ¿En qué momento se midieron?

3. En cierto tiempo la temperatura asciende, ¿cuándo se da ese aumento?, ¿hasta qué momento? ¿Cuándo desciende la temperatura? ¿Cuándo sucede lo mismo con la humedad?

4. En ambas gráficas se muestran lineas promedios de temperatura y humedad respectivamente, y en cierto momento las gráficas cruzan estas lineas. ¿Cuándo sucede esa intersección?

5. Indica los instantes donde la temperatura está por sobre el promedio y cuándo por debajo. Realiza el mismo análisis para la humedad.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema muestra dos gráficas, una donde se observa la relación entre la temperatura respecto a las horas del día, y la otra hace lo mismo con la humedad. Las unidades del eje vertical son grados centígrados y porcentaje de humedad, respectivamente. Las preguntas hacen referencia a lo que se puede observar en las gráficas, solicita valores puntuales y también valores en los ejes.

2. *Pensar una estrategia*: La estrategia se basará simplemente en la observación de las gráficas en *GeoGebra*, ayudándose con la cuadrícula para encontrar los valores tanto en el eje horizontal como vertical. En el caso de dudas sobre la precisión de los valores el docente podrá intervenir advirtiendo que se puede aproximar o redondear cifras. Se recomienda agrupar a los alumnos de a tres o cuatro para propiciar el intercambio de diálogo entre ellos.

3. *Ejecutar el plan:* Ejecutar el plan: Se espera que los alumnos respondan las preguntas de forma aproximada a como se detalla a continuación. El docente deberá estar atento a cada grupo de alumnos y en caso de detectar que los alumnos no pueden responder alguna de las preguntas intentar reformular cada interrogante de otra forma, siempre a partir de la observación directa de la gráfica.
1. ¿Desde qué hora a qué hora se registraron datos de ambos fenómenos? Para ambos casos se observa que se registró desde las $0hs$ a $24hs$. *¿Qué valores de temperatura y humedad se registraron?* En el caso de la temperatura, se registraron valores aproximados entre $9°C$ y $29°C$, la temperatura osciló entre $19\,\%$ y $72,5\,\%$.

2. ¿Cuáles fueron las temperaturas máximas y mínimas registradas? En principio, la respuesta anterior también incluye a ésta, $29°C$ es la temperatura máxima observada y $9°C$ la mínima. *¿Cuáles fueron los valores de humedad máxima y mínima registrados?* Los valores *mínimos* y *máximos* son, también, $19\,\%$ y $72,5\,\%$ respectivamente. *¿En qué momento se midieron?* La temperatura máxima fue medida a las $18hs$, y la mínima a las $2hs$. La humedad mínima se dio alrededor de las $20hs$ y la máxima a las $4:30hs$.
Es posible que algún grupo se de cuenta que estrictamente hablando se dan temperaturas y humedades máximas y mínimas tanto al inicio de la medición como al finalizar, pero son valores «relativamente menores/mayores» a los dados anteriormente: *máximo* de temperatura en $10°C$ a las $0hs$, *mínimo* de temperatura a las $24hs$ en aproximadamente $18°C$, *mínimo* de humedad a las $0hs$ con $55\,\%$ y *máximo* de humedad a las $24hs$ con $33\,\%$.
3. En cierto momento la temperatura asciende, ¿en qué momento se da ese aumento?, ¿hasta qué momento? La temperatura asciende desde el mínimo de $9°C$ a las $2hs$ hasta las $18hs$ cuando alcanza el *máximo* de $29°C$. *¿Cuáles son los momentos en que desciende la temperatura?* La temperatura comienza descendiendo desde los $10°C$ al inicio hasta las $2hs$, y luego también lo hace desde el *máximo* de las $18hs$ hasta las $24h$ cuando llega a los $18°C$. *¿Cuándo sucede lo mismo con la humedad?* Respecto a la humedad, comienza en alza desde las $0hs$ en $55\,\%$ hasta $72,5\,\%$ a las $4:30hs$, luego desciende hasta $19\,\%$ a las $20hs$ y vuelve a subir a $33\,\%$ al finalizar.
4. En ambas gráficas se muestran lineas promedios de temperatura y humedad respectivamente, y en cierto momento las gráficas cruzan estas lineas. ¿Cuándo sucede esa intersección? La gráfica de temperatura hace intersección con la temperatura media en dos ocasiones, a las $10hs$ y un poco antes de las $24hs$. En tanto la gráfica de humedad solo corta con la media una sola vez, entre las $12hs$ y las $13hs$.
5. Indica los momentos donde la temperatura está por sobre el promedio y cuándo por debajo. Realiza el mismo análisis para la humedad. La temperatura está por sobre la linea de valores promedio entre las $10hs$ y antes de las $24hs$, y por debajo desde el inicio hasta las $10hs$ y luego desde un poco antes de las $24hs$ hasta terminar el día. La humedad está por sobre la media desde el inicio de la medición hasta que corta entre las $12hs$ y las $13hs$, luego está por debajo hasta las $24hs$.

4. *Verificar y repensar la solución*: Si la actividad se desarrolló grupal o individualmente es necesario cotejar las respuestas de otros para conocer cómo se describieron, y en particular comparar cómo se anotaron los intervalos y rangos. Es posible que algún grupo haya intentado describir los intervalos de forma más cercana a la notación matemática, como por ejemplo para la pregunta *«Indica los momentos donde la temperatura está por sobre el promedio»*, la respuesta sea «10 a 24» o alguna notación similar. Es posible que ante la necesidad de querer responder de forma precisa algún grupo haya optado por utilizar la herramienta de "punto" sobre la función, generando así valores de coordenadas para *máximos* y *mínimos*, no siendo necesariamente los valores exactos:

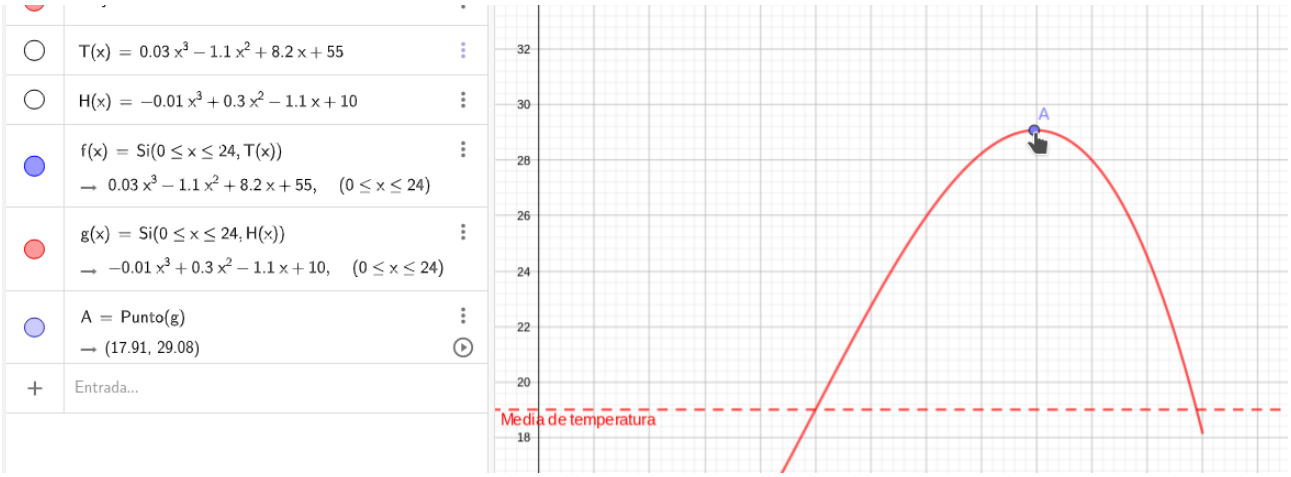


Figura 2.35: Herramienta de «Punto» sobre la gráfica de temperatura.

Validación

Revisaremos las respuestas utilizando herramientas de *GeoGebra*, de manera que se puedan responder de forma más precisa y con cierto fundamento, siempre comparando con lo resuelto en la etapa anterior.

Ante la pregunta *«¿Desde qué hora a qué hora se registraron datos de ambos fenómenos?»* observamos que la misma definición de ambas funciones en *GeoGebra* se indican con inecuaciones:

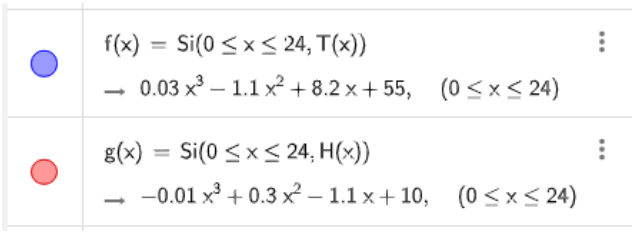


Figura 2.36: Ambas funciones están definidas en el intervalo $0 \leq x \leq 24$, o $[0; 24]$.

La pregunta *«¿Qué valores de temperatura y humedad se registraron?»* hace referencia al rango de valores de cada función, y para ello utilizaremos la herramienta «Puntos especiales» que permite encontrar aquellos puntos que son de interés para el análisis de funciones:

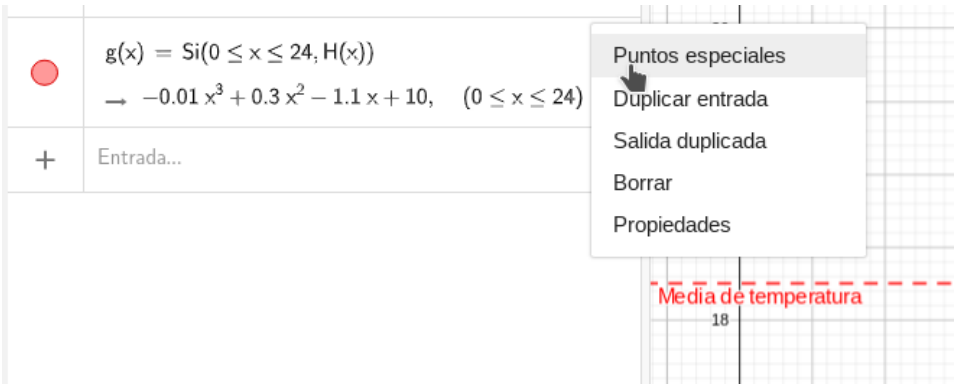


Figura 2.37: Se accede a «Puntos especiales» desde los tres puntos de la expresión de entrada de la función.

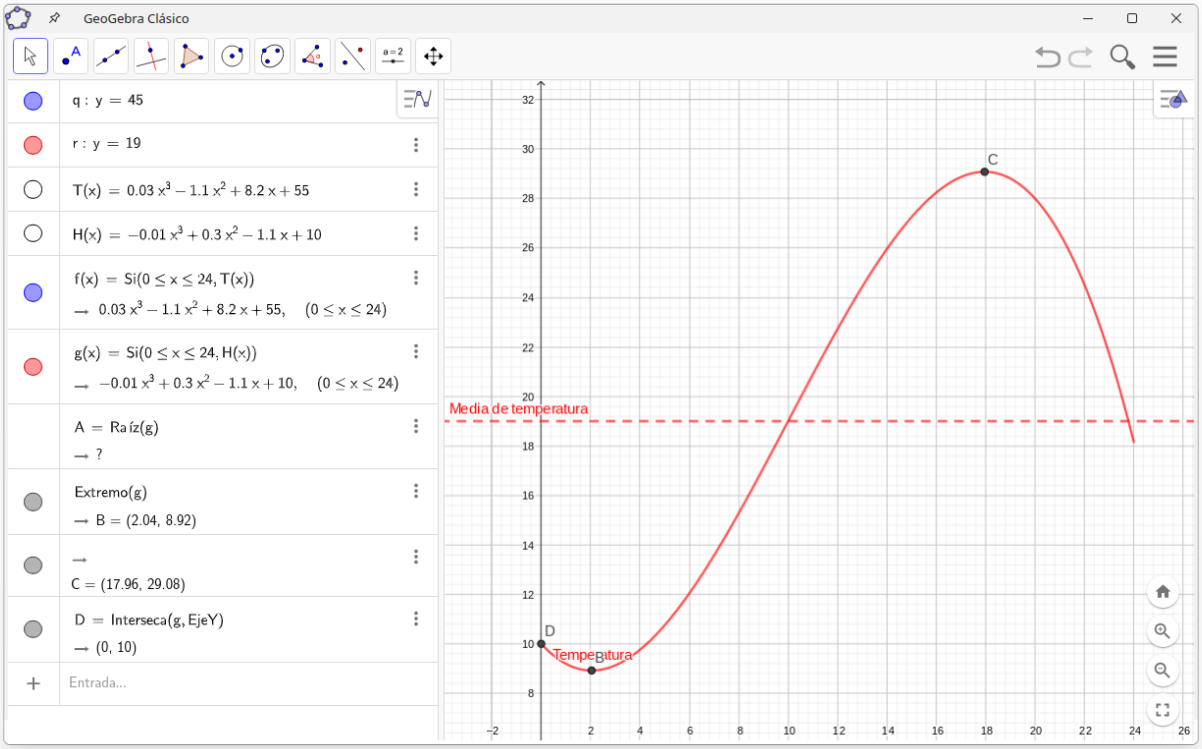


Figura 2.38: Puntos especiales: raíces, extremos e intersección con el eje de las ordenadas.

Los extremos son *máximos* y *mínimos*, y sirven para determinar el rango de temperaturas, de B a C, es decir de$8,92°C$ a $29,08°C$. Estos valores también se pueden conseguir con los comandos de *GeoGebra* «*Máximo*()» y «*Mínimo*()», por ejemplo para conseguir el mínimo relativo final indicamos la función «*g*» y los valores 20 y 24 entre los que *GeoGebra* buscará:

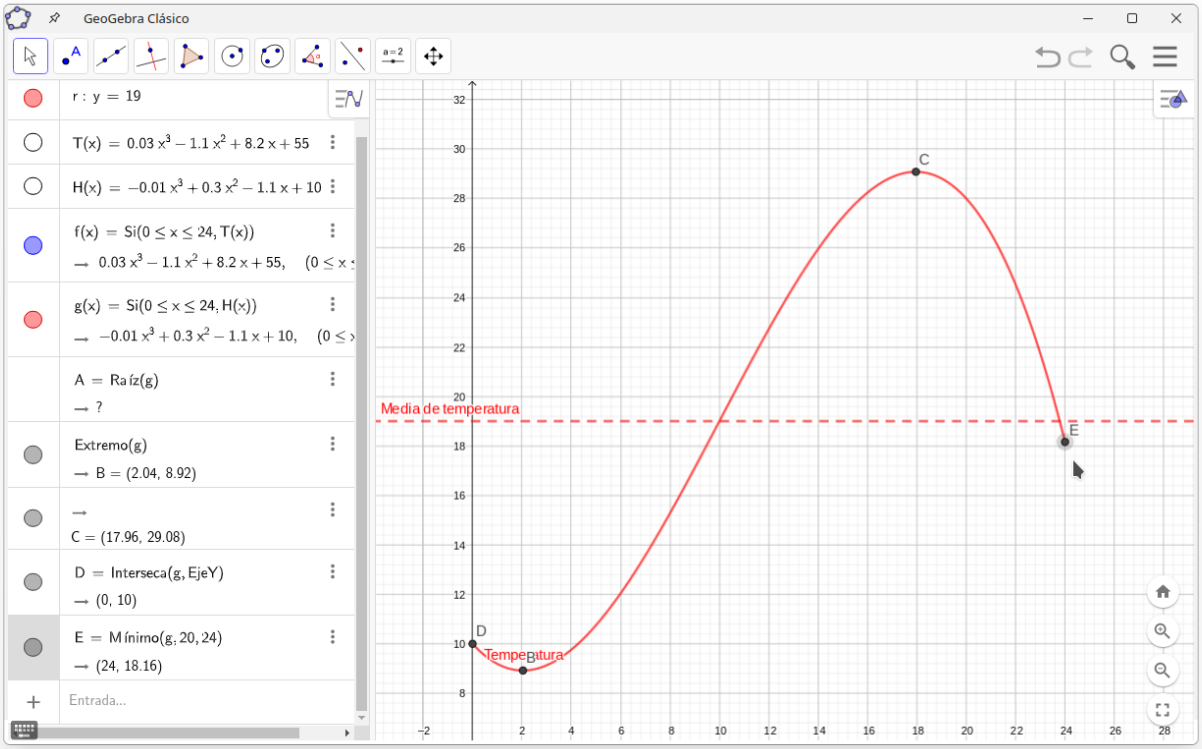


Figura 2.39: El mínimo encontrado por *GeoGebra* en ese rango (de 20 a 24) está en el punto «*E*».

Por último, en la pregunta 4 se necesita conocer el valor exacto de intersección de cada función con la media, y para ello se utilizará el comando de intersección «Interseca»:

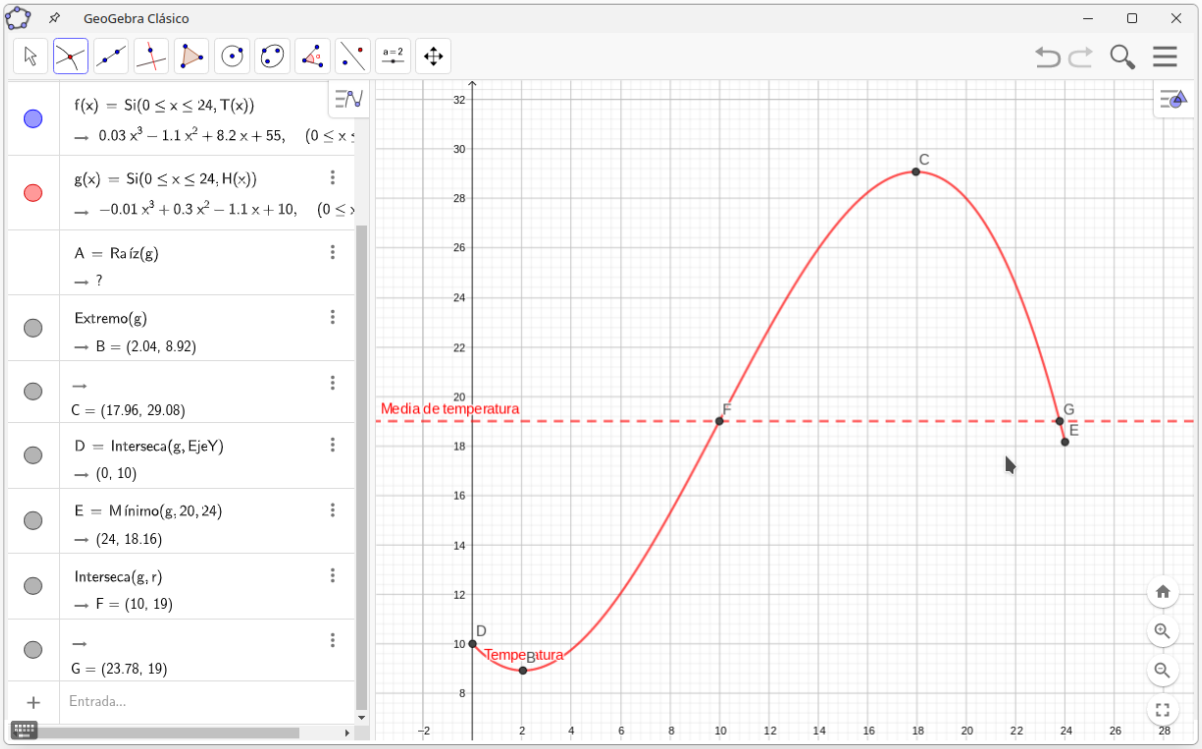


Figura 2.40: La intersección entre la función «g» y la recta «r» da por resultado los puntos «F» y «G».

Formalización

El docente volverá sobre el problema con cada pregunta trabajada en la etapa de resolución, definiendo los conjuntos del análisis de funciones:

- La primera pregunta hace referencia al *Dominio* e *Imagen* de una función.
- La segunda busca *Máximos* y *Mínimos*.
- La tercera pregunta se relaciona con conjuntos de *Crecimiento* y *Decrecimiento*.
- La cuarta pregunta, si se reformula la función de la siguiente manera, permite estudiar el conjunto de *Raíces o Ceros de* la función:

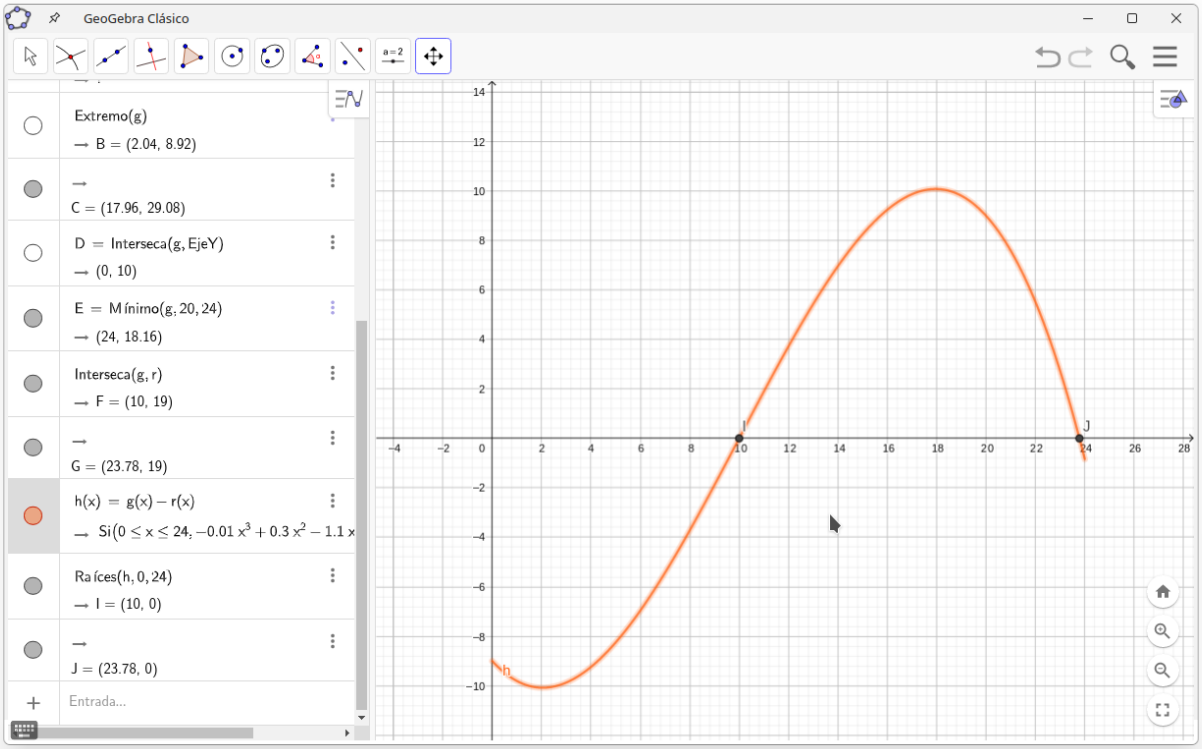


Figura 2.41: Los puntos «I» y «J» son las raíces de la función $h(x)$, definida como $g(x) - r(x)$.

- La última pregunta utiliza los valores de raíces o ceros en esta función para trabajar los conjuntos de *Positividad* y *Negatividad*.

Para evitar confusiones el docente deberá resaltar que para el caso de la redefinición de las funciones de modo que la recta de promedio (tanto para el caso de la Temperatura como la de Humedad) coincida con $y = 0$ permite estudiar *Raíces* de una función, pero que en las funciones originales de este problema dichas intersecciones no existen. Será necesario que posteriormente a esta clase se analicen funciones donde puedan estudiarse *raíces* y conjuntos de *positividad/negatividad* sin necesidad de redefiniciones de funciones.

El problema también puede ser utilizado para introducir la notación matemática propia para *intervalos*, que en este ejemplo no se utilizó deliberadamente para simplificar la resolución.

Además de estas herramientas, es necesario observar que puede utilizarse una herramienta muy interesante e interactiva denominado inspector de funciones, que se encuentra en la botonera superior, en el desplegable coincidente al botón «Ángulos». No se utilizó en esta actividad porque contiene parámetros avanzados para la edad sugerida de la secuencia didáctica.

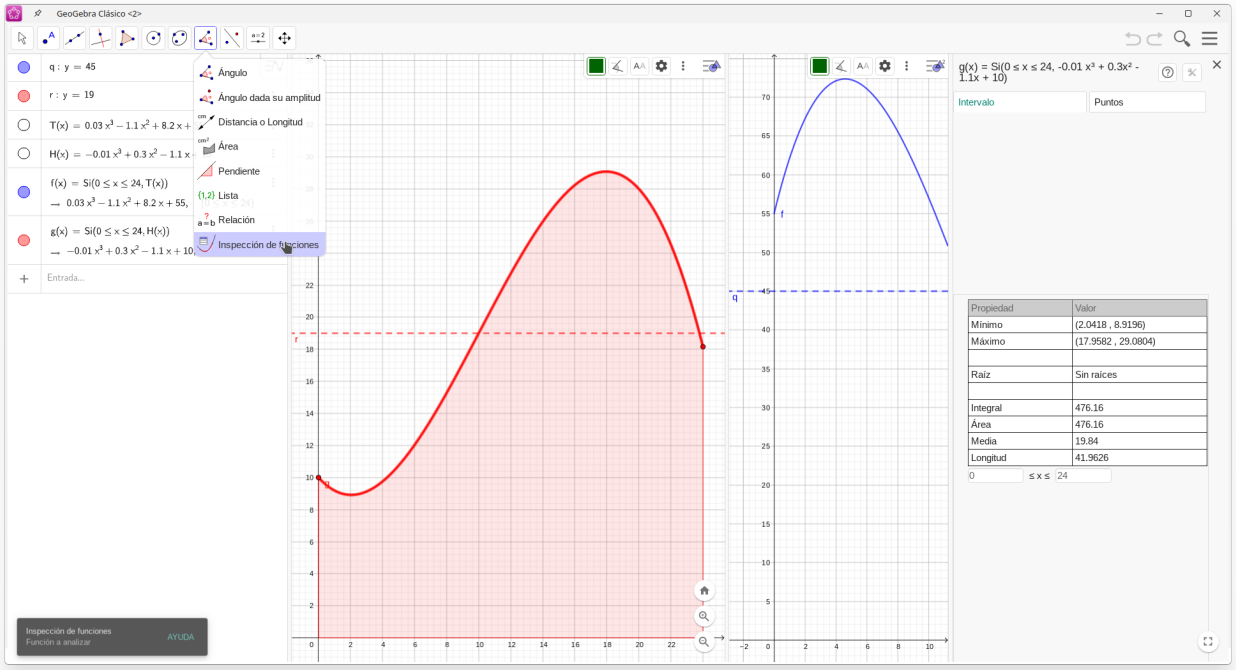


Figura 2.42: El «Inspector de funciones» permite analizar distintos parámetros de la función entre dos puntos dinámicos (en rojo). El panel de la derecha muestra *máximos*, *mínimos*, *raíces*, etc.

Se sugiere que luego de definir estos conjuntos se presente alguna otra situación problemática similar a la dada, de forma que los alumnos puedan practicar el análisis de funciones con las herramientas que provee *GeoGebra*.

2.2.4. Función cuadrática

Nombre: El cerco del jardín.

Resumen: Mediante el análisis de un simple problema que relaciona el área y perímetro de un cerco se llega a construir el concepto y definición de función cuadrática.

Objetivo: Se busca que el alumno descubra las funciones cuadráticas, reconozca la parábola asociada y pueda utilizar herramientas propias como la fórmula resolvente para encontrar soluciones al diversos problemas.

Saberes: Expresiones algebraicas, funciones lineales, área y perímetro de cuadriláteros.

Edad: 14 a 15 años.

Preparación: La secuencia aborda un problema de optimización de la función área. Siendo que los alumnos deben encontrar el punto máximo de un tipo de función cuya forma no identifican, todavía, como una parábola. Para ello el docente deberá

Planteo

Un granjero tiene una cantidad fija de $24m$ lineales de cerco para rodear un jardín rectangular, y de esta forma proteger sus cultivos de que se los coman los animales de la granja. Se pregunta: ¿cuáles deben ser las medidas de los lados para que el jardín tenga la mayor superficie posible?

Figura 2.43: Los animalitos de la granja no pueden pasar al jardín. Generada por Grok IA y modificada por el autor.

Nota: Durante el desarrollo de la clase, el docente deberá ir presentando preguntas de validación que inicialmente no están en el problema pero que le dan sentido: ¿Se admiten medidas no enteras para los lados del rectángulo? ¿Hay una única solución posible? ¿Cómo podemos estar seguros? ¿Existe una expresión funcional que permita combinar el área con el perímetro para este caso particular? ¿Existe un rectángulo cuya área sea la menor posible?

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema trata sobre una cantidad finita de cerco, de $24m$ que debe usar para encerrar una superficie donde el granjero tendrá su jardín. De esta forma el cerco protege sus cultivos de los animales de su granja. El problema asume que el cerco tendrá forma rectangular, y precisamente son las medidas de esta figura las que hay que encontrar de manera que se maximice el área del cerco.

2. *Pensar una estrategia*: Lo primero que debe surgir, y en ello estará atento el docente, es en qué posibilidades de medidas se tienen para armar un rectángulo cuyo perímetro total sea de 24m. El maestro motivará a que los alumnos realicen sus pruebas en una etapa grupal, donde las respuestas podrán ser del tipo: «Es posible armar un rectángulo de $2m$ de ancho y $10m$ de largo», el cual verifica que $2m + 2m + 10m + 10m = 24m$. O «un rectángulo de $5m$ de ancho y $7m$ de largo», que también verifica un perímetro de $24m$.
   La primera de las estrategias entonces será la prueba y error.

3. *Ejecutar el plan:* Los alumnos, en grupos, trabajarán en la búsqueda de soluciones. El docente les propondrá que anoten todos los pares de lados que verifican tener $24m$ de perímetro con su correspondiente área. Podrán armar una tabla de valores como la siguiente, en papel o en la *Hoja de cálculo* de *GeoGebra*, que podrá tener cierto orden dependiendo de si se dan cuenta que existen ciertos patrones de comportamiento entre el ancho y largo del rectángulo para que coincidan en perímetro:

Ancho	Largo	Superficie	Perímetro
$2m$	$10m$	$2m \times 10m = 20m^2$	$2(2m + 10m) = 24m$
$5m$	$7m$	$5m \times 7m = 35m^2$	$2(5m + 7m) = 24m$
$1m$	$11m$	$1m \times 11m = 11m^2$	$2(1m + 11m) = 24m$
$4m$	$8m$	$4m \times 8m = 32m^2$	$2(4m + 8m) = 24m$
$6m$	$6m$	$6m \times 6m = 36m^2$	$2(6m + 6m) = 24m$
$3m$	$9m$	$3m \times 9m = 27m^2$	$2(3m + 9m) = 24m$

   Al observar la tabla los alumnos llegarán a la conclusión de que el rectángulo que soluciona el problema de optimización es en realidad el cuadrado de lado $6m$.
   Es posible que la respuesta del cuadrado de $6m$ de lado esté ausente en algunas producciones de los grupos ya que algunos alumnos pueden pensar que el cuadrado no es un rectángulo. En tal caso el docente podrá retomar esta idea en el siguiente paso, de forma que puedan argumentar por qué piensan eso.

4. *Verificar y repensar la solución*: En este paso, simplemente, cotejarán los resultados obtenidos. El docente resaltará entre las tablas coincidencias en las respuestas, dimensiones invertidas, valores faltantes, y medidas no enteras para los lados.
   También buscará errores de cálculo, donde por ejemplo la suma de los lados no verifique el perímetro. En el caso, y con las preguntas apropiadas, buscará que los alumnos puedan darse cuenta de sus equivocaciones.

Validación

Para la validación será suficiente trabajar con las tablas elaboradas y la guía del docente que pondrá nuevas preguntas sobre la mesa para abrir el debate:

- ¿Hay una única respuesta al problema? ¿Cómo podemos estar seguros?.
- Observando valores de lados como $1m$ para el ancho y $11m$ para el largo, cuya superficie da $11m^2$, ¿existe un rectángulo que logre lo opuesto a lo que pide el problema? Es decir, ¿existe un rectángulo que tenga perímetro $24m$ con la menor superficie posible?
- ¿Puede existir un rectángulo con lado $13m$? ¿Por qué?
- ¿Existirá una expresión matemática que permita obtener todas las respuestas posibles?

Para encontrar respuestas a estas preguntas el docente propondrá que los alumnos grafiquen los lados de sus tablas en *GeoGebra*. Y les encargará, además, que calculen pares de lados con medidas no enteras para agregar al gráfico:

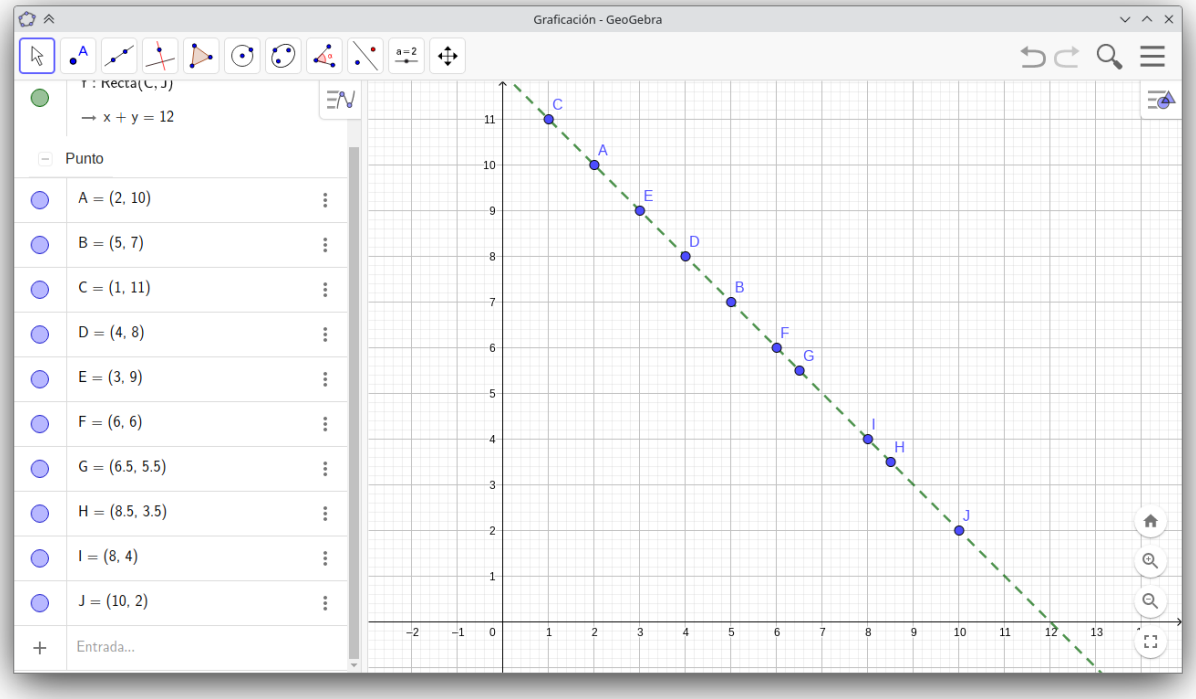


Figura 2.44: Los puntos de la tabla presentan una regularidad, están alineados. Se cargaron, además, valores invertidos y no enteros de lados.

Mediante los interrogantes adecuados el docente esperará que el alumnado comprenda la relación fijada por el perímetro: Cada par de lados cumple que su suma es 12, esto es debido a la fórmula de perímetro, donde si x y y son los lados del rectángulo, entonces:

$$P = 2(x + y)$$

Como $P = 24m$ se tiene que $24 = 2(x + y)$, por lo tanto$12 = x + y$. Con este dato sabrán que no es posible alcanzar ni pasar del valor $12m$ para alguno de sus lados, porque si bien el par $(12, 0)$ cumple la condición dada no se forma rectángulo alguno (lo mismo pasa con $(0, 12)$).

La gráfica también nos da otra información que permite reforzar la hipótesis de que el par $(6, 6)$ es el que maximiza la solución de obtener la mayor superficie con perímetro $24m$: El punto se encuentra «a mitad de camino» entre todos los puntos que pueden marcarse.

Para validar esta idea, el docente propondrá encontrar la fórmula del área para un punto genérico de lados x e y, que en realidad es muy simple:

$$A = xy$$

Sabiendo además que $12 = x + y$, podemos hacer un despeje y reemplazo, $12 - x = y$. Por lo tanto, al reemplazar y en la ecuación anterior tenemos:

$$A = x(12 - x)$$

La cual es una expresión funcional que depende solo de x, no como las anteriores que dependían tanto de x como de y. El docente procederá ahora a graficar esta función en una nueva ventana de *GeoGebra*:

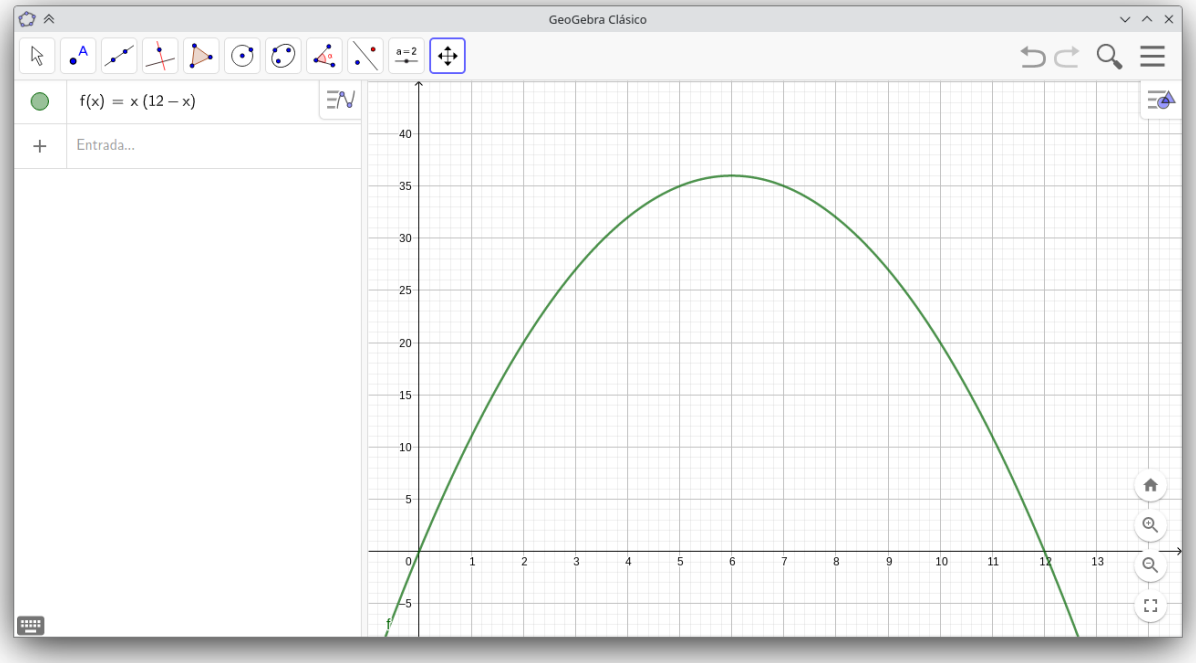


Figura 2.45: La gráfica presenta forma de curva, cóncava hacia abajo, con un «máximo absoluto» en el punto $(6, 36)$ y cortes en el eje de las abscisas 0 y 12. Para una mejor lectura de la gráfica se escalaron los ejes en relación $1 : 5$.

El maestro indagará a sus alumnos al respecto de cómo entender la curva generada por la fórmula, esperando que los alumnos comprendan que en el eje horizontal se encuentra uno de los valores del lado del rectángulo (el otro no importa porque está condicionado por el perímetro), y que la imagen devuelve el área obtenida con dicha medida. Les explicará que, por ejemplo, para un lado de $x = 6$ se obtiene un área de 36, es decir, el par $(6, 36)$. O para un lado $x = 2$ (el otro medirá $12 - 2 = 10$)el área obtenida es $20m$. Decimos entonces que la función A devuelve el área del rectángulo para cualquier medida de un lado en el intervalo $(0, 12)$, y se la anota así:

$$A(x) = x(12 - x)$$

Luego aplicará la propiedad distributiva de la multiplicación en la resta del paréntesis, quedando de esta otra forma:

$$A(x) = 12x - x^2$$

El maestro explicará que su gráfica no cambiará ya que se trata de la misma expresión dispuesta algebricamente de otra manera. Sin embargo les hará notar que en la expresión hay un término cuadrático: $-x^2$, y por ello llamaremos a esta función como *cuadrática*.

Antes e avanzar el docente volverá a las preguntas iniciales de esta etapa de validación, para que las respondan observando la gráfica:

- Comprenderán que el par $(6, 36)$ es el máximo posible, y es único posible.
- Encontrarán que los puntos $(0, 0)$ y $(12, 0)$ son las intersecciones con el eje de las abscisas, pero que sin embargo no son parte del dominio de la función porque con ellos no es posible armar ningún rectángulo aunque verifiquen el perímetro del problema.
- Analizarán la gráfica para valores de x menores a 0 y mayores a 12, donde las imágenes son negativas y en consecuencia no son físicamente posibles como soluciones de la problemática.

Por último, en esta etapa, armará un rectángulo en una vista gráfica de GeoGebra de forma que al mover un deslizador se vayan dibujando todos los rectángulos posibles para el problema. Seguirá las siguientes instrucciones:

1. Ingresará un deslizador con dominio entre 0 y 12;
2. Ingresará el punto $(a, 12 - a)$ en la Vista algebraica;
3. Trazará rectas perpendiculares a los ejes cartesianos desde el punto A y luego graficará un rectángulo utilizando los cuatro puntos delimitados por las rectas (A, las dos intersecciones con los ejes, y el origen);
4. Activará la segunda vista gráfica desde el menú, e inmediatamente seleccionada ingresará el punto $(a, a(12-a))$ en la vista algebraica;
5. Activará «Mostrar rastro» de los puntos A y el punto E en cada vista gráfica.
6. Dará los formatos de estilo apropiados para que los elementos gráficos queden igual a como se observa en las siguiente figura.

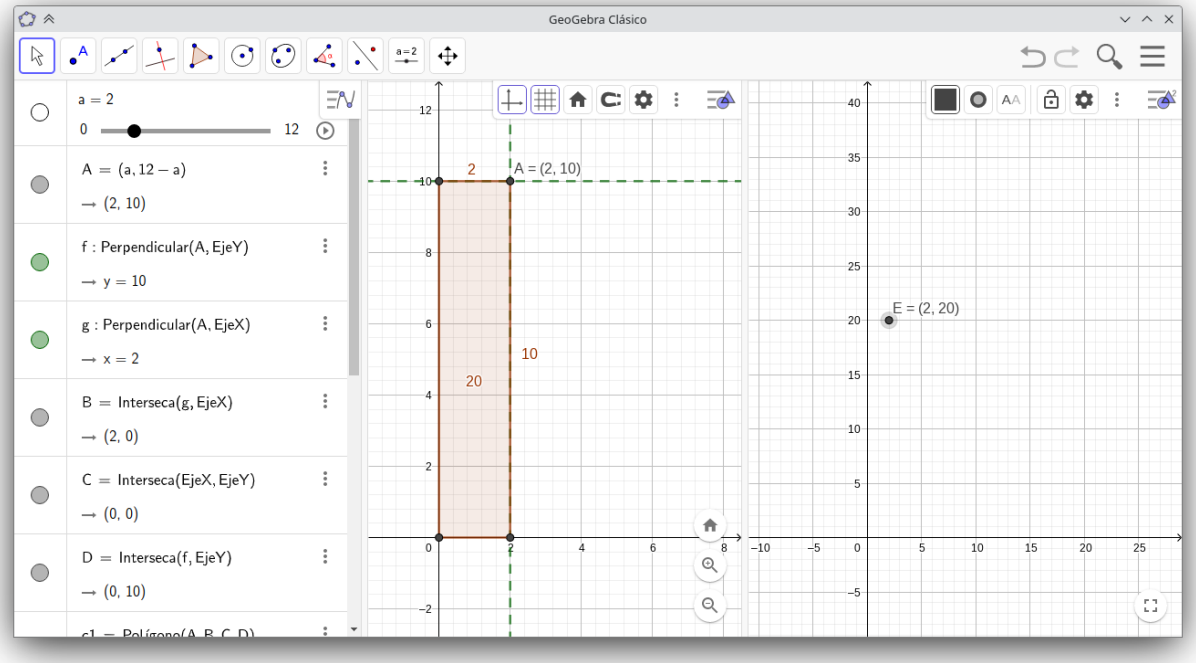


Figura 2.46: Así debe quedar la secuencia de pasos.

A continuación el docente moverá el deslizador a de 0 a 12 (puede ponerlo en automático) y mientras sucede volverá a preguntar a los alumnos las interrogantes que daban inicio al debate de validación. Se espera que ellos puedan comprender con esta gráfica dinámica qué sucede con la función en todo su dominio, es decir, como se relacionan los lados con el perímetro y el área para el problema dado.

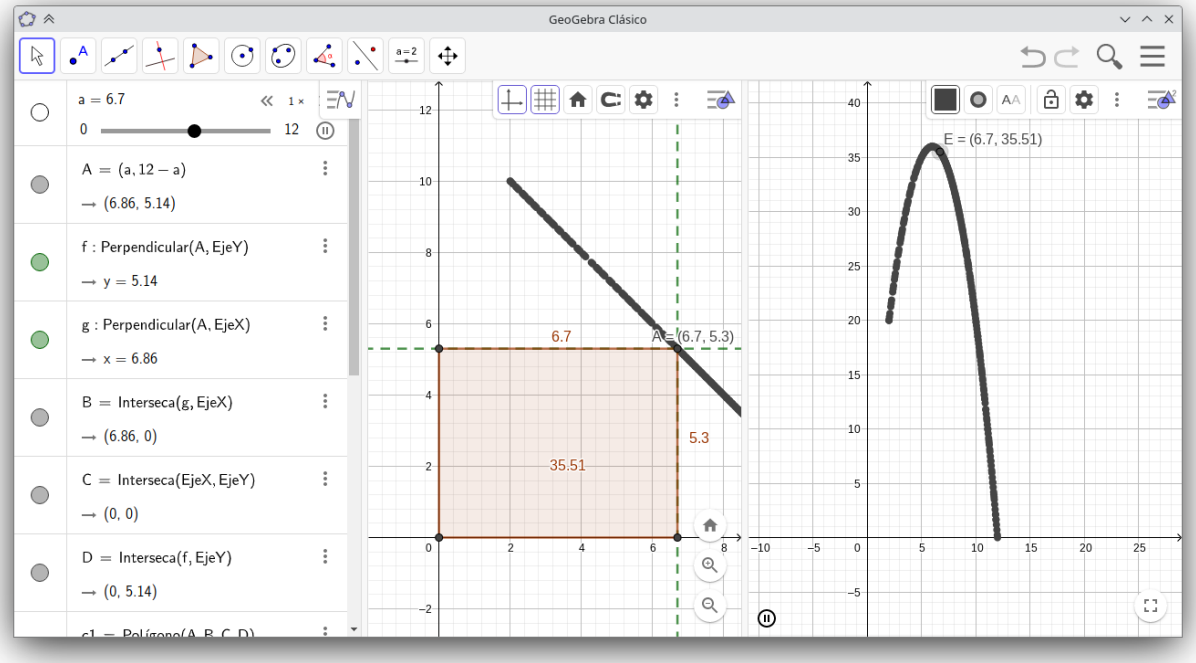


Figura 2.47: El deslizador se mueve automáticamente generando los rastros para los puntos A y E. La dinámica de la gráfica permitirá observar las posiciones de los puntos al momento de generar máximos y mínimos en la curva.

Finalizando, el docente podrá dibujar la función $12x - x^2$[3] en la segunda vista gráfica de forma que los alumnos puedan observar que el trazo marcado por el punto E coincide plenamente con la gráfica de la función. Con esto también podrá trabajar aspectos relacionados con el dominio de la función, debido a que la gráfica desde la expresión no está acotada como si lo está la generada por el punto E.

Formalización

En la etapa de formalización el docente institucionalizará la función cuadrática dentro del marco académico, profundizando la teoría de acuerdo a la literatura matemática que sea necesaria para el nivel, ya sea que se la trate de forma básica como función o que luego derive en el estudio de la ecuación de la parábola.

En principio aportará una definición formal:

> Llamaremos *función cuadrática* a toda función cuya expresión algebraica sea de la forma:
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

En la expresión hallada para el problema, la función $A(x) = 12x - x^2$ cumple con esta definición puesto que $a = -1$, $b = 12$ y $c = 0$. El orden de los términos es indistinto, sin embargo se prefiere siempre que la función esté ordenada de acuerdo al grado de los mismos.

El dominio por defecto de la función cuadrática es $\mathbb{R}$, y como se ha visto su gráfica es una curva simétrica con forma de «C» (parábola). Puede ser cóncava hacia abajo o arriba, dependiendo del valor del parámetro a. El docente podrá proponer a sus alumnos que verifiquen la forma y posición de la parábola mediante la experimentación en *GeoGebra*. Para ello crearán tres deslizadores, a, b y c y escribirán la expresión $ax^2 + bx + c$ en el panel de la *vista algebraica*, observarán y anotarán sus conclusiones luego de mover los deslizadores de forma individual o combinándolos entre sí:

[3]Es importante ingresar solo la expresión para que *GeoGebra* agregue un nombre disponible de forma automática, ya que si utilizamos la expresión $A(x) = 12x - x^2$ le diremos al programa que queremos reemplazar el objeto A (ya existente en el panel) por otro, generando un conflicto en la programación del archivo.

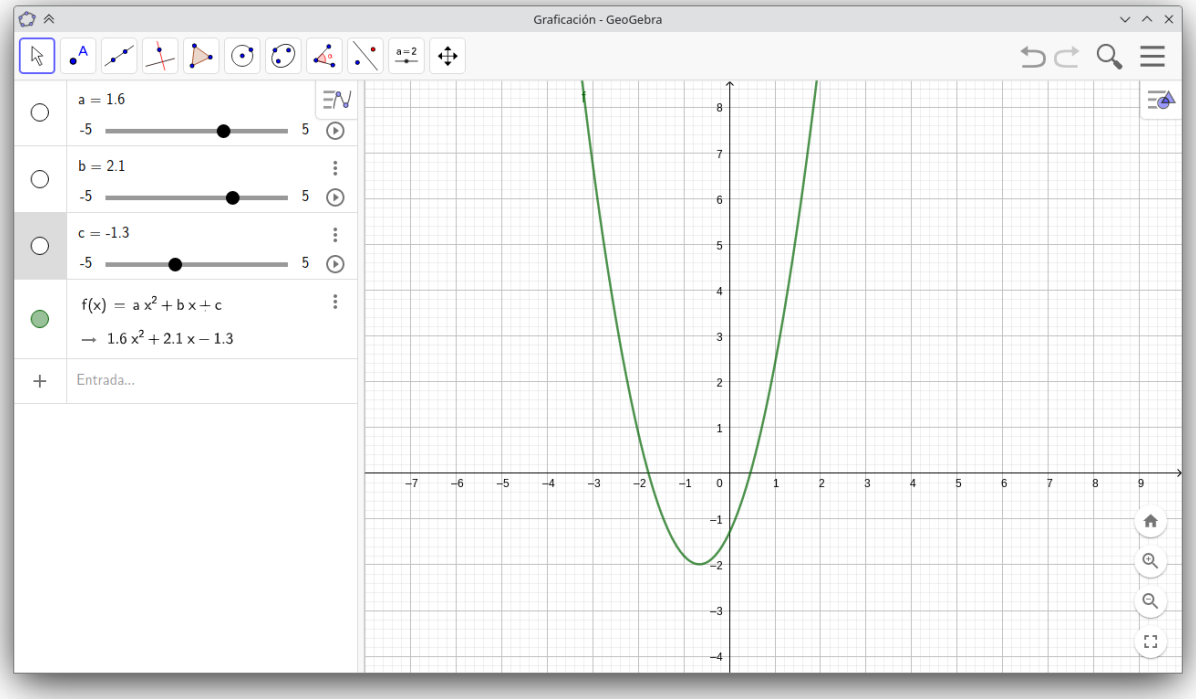


Figura 2.48: Los valores $a = 1.6$, $b = 2.1$, y $c = -1.3$ generan la gráfica de la parábola (en verde).

La experimentación con los tres parámetros permitirá a los alumnos intuir el significado directo de los parámetros a y c:

- a modifica la apertura y orientación de la gráfica de la parábola;
- c determina el valor del corte con el eje vertical (ordenadas).

El docente indagará por los cortes con el eje horizontal. Es posible que algunos alumnos recuerden que a esos valores se los llama «ceros» o «raíces» y que implican resolver la ecuación «a cero». Si no lo recuerdan o no lo han visto con anterioridad lo podrá definir de la siguiente forma:

> Los ceros o raíces de una función son los valores de la variable independiente que hacen que el valor de la función sea igual a cero, es decir, $f(x) = 0$. Gráficamente, representan los puntos donde la gráfica de la función corta o intersecta el eje horizontal (abscisas). Se obtienen igualando la función a cero y despejando x.

En *GeoGebra* resolver este tipo de ecuaciones es muy sencillo, basta con utilizar el comando «Resuelve()»[4] para que el programa devuelva los valores que solucionan la ecuación:

[4]También se puede utilizar el comando «Raíces()», cuyos argumentos son la función, y dos números de cota entre los que buscar las raíces.

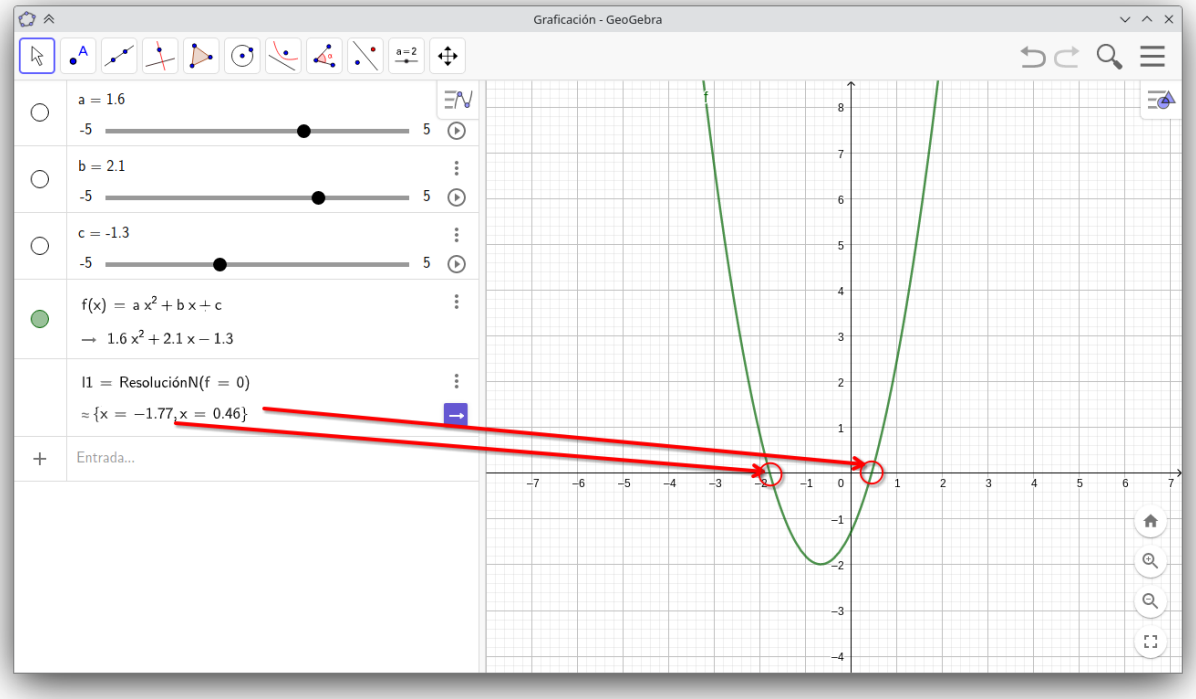


Figura 2.49: Al ingresar *Resuelve*$(f = 0)$ el programa interpreta que debe igualar la función a cero y encontrar los valores de x que verifican la ecuación.

En general, para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza la fórmula llamada «Resolvente» que se obtiene a partir de la siguiente demostración[5]:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
\frac{ax^2 + bx + c}{a} &= \frac{0}{a} \\
x^2 + \frac{2}{2}\frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\
(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\
(x + \frac{b}{2a})^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
(x + \frac{b}{2a})^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_{1;2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Si no surge en la clase, el docente deberá indagar sobre la existencia de las raíces para los distintos tipos de ecuaciones cuadráticas que se presentan. Les hará probar diferentes combinaciones con los deslizadores de modo que suceda que alguna parábola no corte el eje de las abscisas. En este caso podrán intentar resolver hasta que lleguen al término negativo dentro de la raíz y ya no se pueda avanzar[6].

[5] Para la demostración se necesita emplear la técnica de «completar cuadrados», lo cual puede ser un tema que no hayan visto aún los alumnos. Se deja a criterio del profesor.

[6] Explicará el caso y mostrará que GeoGebra es capaz de resolver las ecuaciones utilizando un nuevo tipo de número que todavía no trabajarán: el número imaginario i.

A continuación, y a partir de estas soluciones, mostrará que es posible encontrar el eje de simetría de la parábola promediando las raíces[7]

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$x_v = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2}$$
$$x_v = \frac{-2b}{4a}$$
$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Para que *GeoGebra* pueda encontrar el eje de simetría de la parábola es necesario primero expresarla como una ecuación, ya que como función no logra interpretar la cónica como tal. Luego se aplica el comando «Ejes()»[8]:

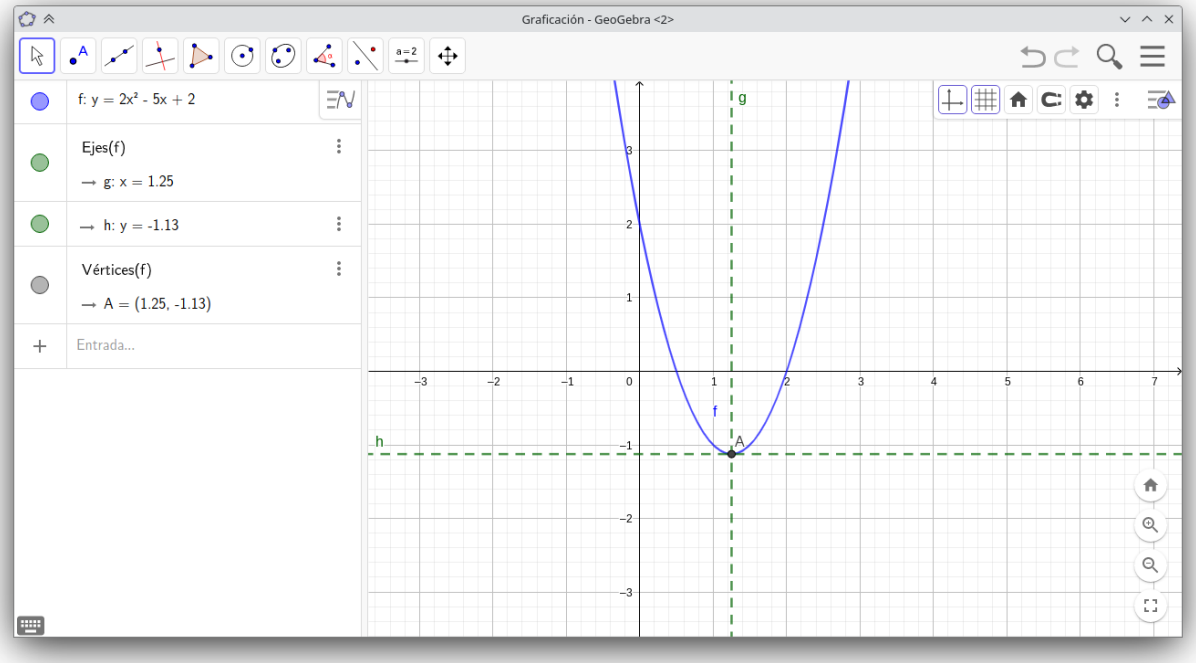


Figura 2.50: La recta g es el eje de simetría de la parábola f. La recta h es tangente a la curva en el vértice.

Una vez que se conoce la ecuación del eje, es posible encontrar el punto vértice de la parábola haciendo $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$, o utilizando el comando «Vértices()» en *GeoGebra*.

Como se ha dicho, el docente determinará hasta dónde avanzará con los contenidos relacionados a la función y ecuación cuadrática en conjunto con su gráfica, la parábola. Por ejemplo, a partir de aquí se podrá trabajar con las diferentes formas de expresar algebraicamente una ecuación cuadrática: *Polinómica, Canónica* o *factorizada.*

[7] Si bien esta demostración parte de conocer la fórmula resolvente, es mucho más fácil de resolver ya que solo posee pasos algebraicos elementales.

[8] El comando encuentra los ejes de cualquier cónica, pero como en este caso se trata de una parábola encuentra el eje y la recta tangente al vértice.

2.2.5. Funciones de proporcionalidad inversa

Nombre: Brillitos para un rectángulo.

Resumen: El problema trata sobre la relación de proporcionalidad inversa que se da entre los lados de un rectángulo y su área. El disparador para este problema surge de estudiar las posibles medidas de los lados de un rectángulo de cartulina para una misma área.

Objetivo: El planteo busca comprender la relación funcional de proporcionalidad inversa que se de entre el área de un rectángulo y los lados que lo componen.

Saberes: Funciones, proporcionalidad inversa.

Edad: 14 a 15 años.

Preparación: En este problema es necesario preparar correctamente la pantalla inicial de *GeoGebra* para trabajar con los distintos rectángulos, esto es iniciando la apariencia en modo «Geometría». Se requiere agregar la cuadrícula para poder graficar de forma precisa las unidades. También será necesario configurar los segmentos para que muestren su nombre y valor en la etiqueta. Para la etapa de Validación se puede iniciar una nueva instancia del programa o bien agregar una segunda Vista Gráfica.

Planteo

Juana ha comprado un sobre de brillitos para decorar un rectángulo de cartulina, que es una especie de pegamento en gel con brillos que se aplica sobre una superficie como si fuese pintura. El paquete dice que alcanza para cubrir $120cm^2$. Entonces piensa, ¿Cuanto tiene que medir el rectángulo para utilizar al máximo el paquete de brillitos? ¿Puede servir un rectángulo de $5cm \times 30cm$? ¿Y uno de $10cm \times 8cm$?

¿Podrás ayudar a Juana a encontrar un rectángulo que permita usar todo el paquete de brillitos sin que falte o sobre gel?

Figura 2.51: Imagen ilustrativa del problema. Generada por Gemini IA y modificada por el autor.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: Juana tiene un sobre con brillitos y una cartulina donde no se especifica el tamaño, aunque se supone que es lo suficientemente grande como para recortar un rectángulo. El sobre alcanza para cubrir $120cm^2$. Hay que ayudar a Juana con el problema, tratando de entender cuánto cubre el gel en el rectángulo que ella elija recortar, es decir, hay que encontrar las medidas de ese cuadrilátero.

2. *Pensar una estrategia*: Se sugiere trabajar este problema en grupos debido a que la naturaleza del problema admite múltiples soluciones iniciales y esto luego será un insumo didáctico.
   Es posible que surjan distintas estrategias de resolución, como por ejemplo dibujar distintos rectángulos con diferentes medidas intentando aproximar el área de $120cm^2$. Las preguntas «¿Puede servir un rectángulo de $5cm \times 30cm$?» y «¿Y uno de $10cm \times 8cm$?» tienen la intención de acotar la búsqueda de estos rectángulos. Otra estrategia podrá ser fijar un valor para un lado, y luego dividir $120cm^2$ por ese valor para hallar el otro lado del rectángulo, justificando la acción en la fórmula del área del rectángulo es igual a $base \times altura$.

3. *Ejecutar el plan:* Se espera entonces que los distintos grupos trabajen sobre soluciones diferentes. Algunos intentarán avanzar con las preguntas iniciales del problema: *¿Puede servir un rectángulo de* $5cm \times 30cm$*?*, *¿Y uno de* $10cm \times 8cm$*?*. El resultado del primero es $150cm^2$, entonces nos sobran $30cm^2$. Y el segundo rectángulo tiene $80cm^2$ de superficie, por lo tanto es menor que el rectángulo buscado.
   Para la primer estrategia se espera que los alumnos comiencen dibujando un rectángulo y calculen su área, que quizás sea menor a $120cm^2$, entonces irán aumentando el valor de sus lados hasta aproximar el valor de referencia. De forma análoga, si el número es mayor a $120cm^2$ disminuirán los valores de los lados hasta llegar al valor ideal.
   En esta instancia se puede utilizar *GeoGebra* para dibujar los rectángulos y calcular el área, aunque seguramente los alumnos elijan valores enteros para los lados y su multiplicación sea sencilla de resolver en el papel.

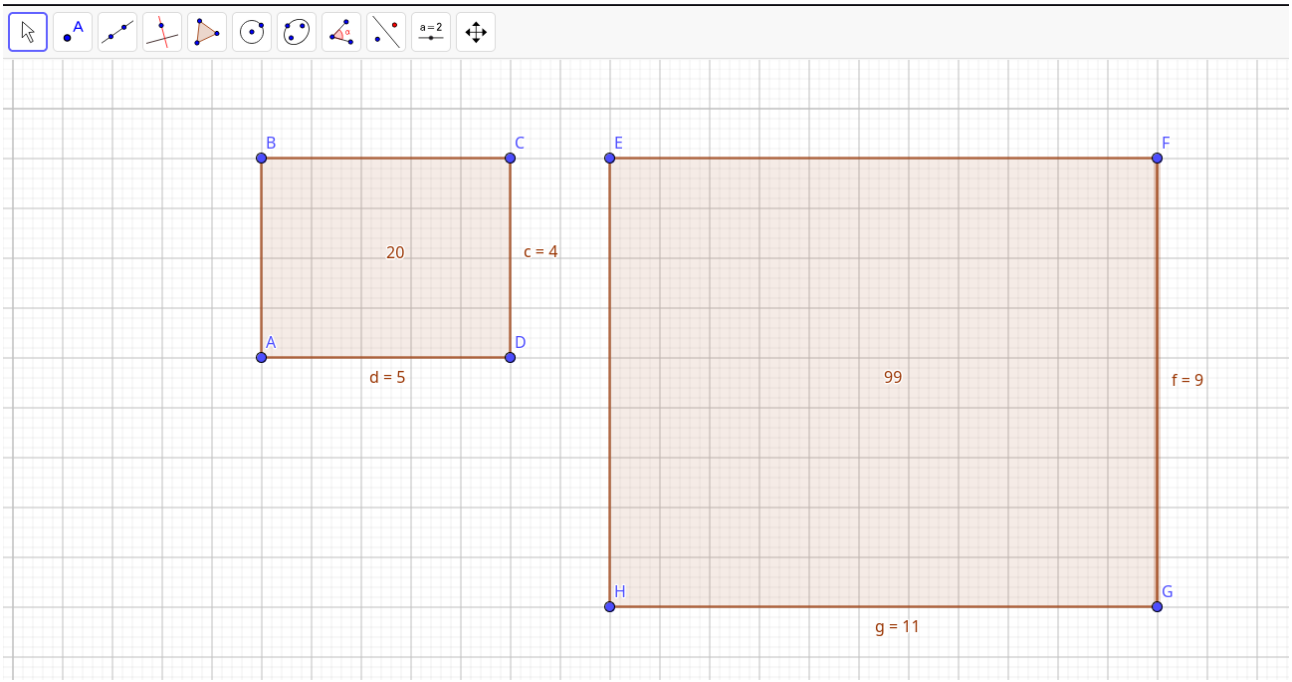


Figura 2.52: El primer rectángulo tiene 5 unidades de base y 4 unidades de altura, su área es $20cm^2$ y claramente no resuelve el problema. El siguiente rectángulo es más grande, mide 11×9 y su área es $99cm^2$. Este último se aproxima mejor a los $120cm^2$ del problema.

La segunda estrategia propuesta necesita de un lado fijo para obtener el otro, por ejemplo si se supone que la base es 10, entonces la altura será de 12, ya que $10cm \times 20cm = 120cm^2$:

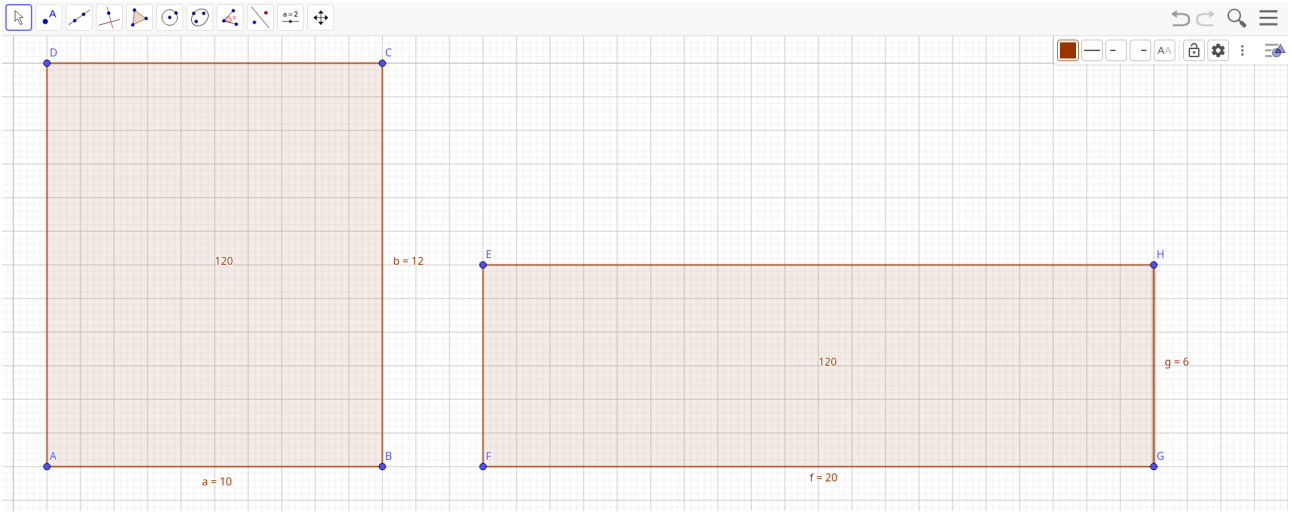


Figura 2.53: Fijando la base en $10cm$ se obtiene $12cm$ de altura. No es la única solución, puesto que con base $20cm$ se obtiene altura $6cm$ para la misma superficie.

4. *Verificar y repensar la solución*: Tanto la solución por aproximación como la estrategia de utilizar la fórmula del área para hallar una respuesta llevan a posibles respuestas. El docente deberá indagar y confrontar entre los grupos las respuestas distintas que dan solución al problema. ¿Cómo puede ser que existan distintas respuestas para la misma pregunta? ¿Son todas correctas? ¿Existe alguna solución «mejor» que otra? ¿Es posible encontrar soluciones con valores no enteros para los lados? ¿Existirá un cuadrado que cumpla con las condiciones del problema? Todas estas preguntas pueden servir como disparadores para la etapa de validación.

Validación

Sabemos que pueden surgir varias soluciones correctas para el mismo planteo, de hecho, el problema fue ideado con ese propósito. Lo que haremos a continuación es listar las posibles duplas que resuelven el problema y, llegado el caso, indagar en búsqueda de más valores. También hay que hacer notar, si es que no surgió ya, la idea de que las duplas invertidas también son soluciones al problema (rectángulos parados y acostados).

Una posible lista de duplas enteras que solucionan el problema puede ser la siguiente: $(10; 12)$, $(12; 10)$, $(6; 20)$,$(20; 6)$, $(15; 8)$,$(8; 15)$, $(24; 5)$, $(5; 24)$, $(30; 4)$, $(4; 30)$. Si graficamos estos pares como puntos en un sistema de ejes cartesianos observaremos un patrón:

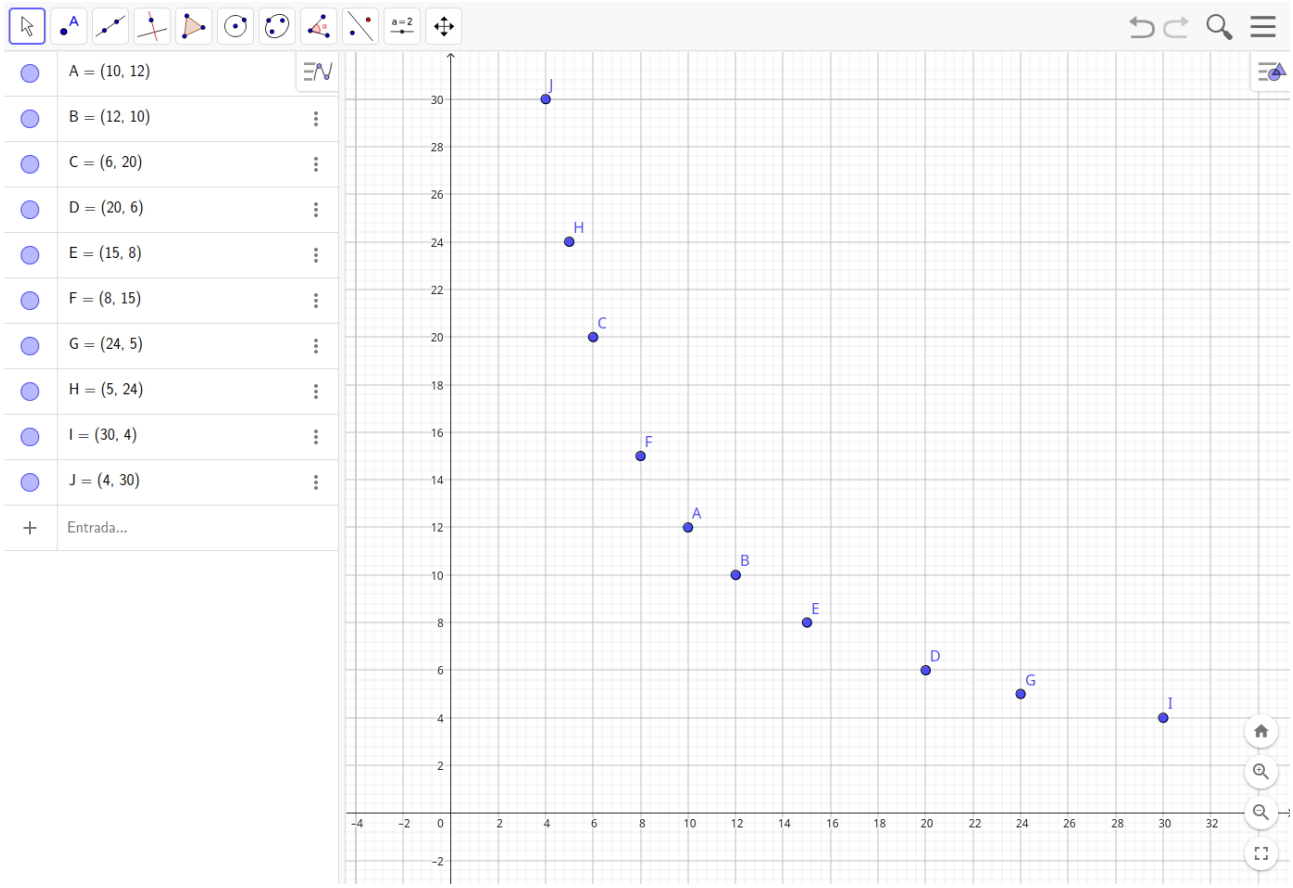


Figura 2.54: El listado de puntos parece seguir una curva bien definida.

Podemos seguir indagando sobre más valores de duplas siempre que aumentemos el valor de la base y disminuyamos la altura. Incluso podemos encontrar, con mayor dificultad, valores decimales para ellos.

Retomando la idea de que los pares de puntos tienen en común que su multiplicación da por resultado 120, es decir el área buscada, podemos expresar que:

$x \times y = A$, siendo A el área del rectángulo, x la base e y la altura.

Despejando la y se tiene entonces:

$y = \frac{A}{x}$, que es una ecuación donde y depende del valor A y de x, pero como A es fijo (120) entonces y depende solamente de x.

Ahora le pedimos a *GeoGebra* que grafique la ecuación $y = \frac{120}{x}$ (también podemos ingresar $x \times y = 120$):

Figura 2.55: Se observa que todos los puntos quedan «unidos» por la ecuación.

Como y depende de x entonces decimos que la altura está en función de la base, es decir que podemos expresar la ecuación como una función:

$f(x) = \frac{120}{x}$

Ahora, para entender mejor el concepto podemos construir un rectángulo cuyo vértice inferior izquierdo esté ubicado en el origen, y el superior derecho sobre la curva. Para ésto marcamos primero un punto (M) sobre la curva, luego graficamos rectas paralelas a ambos ejes y por último el rectángulo:

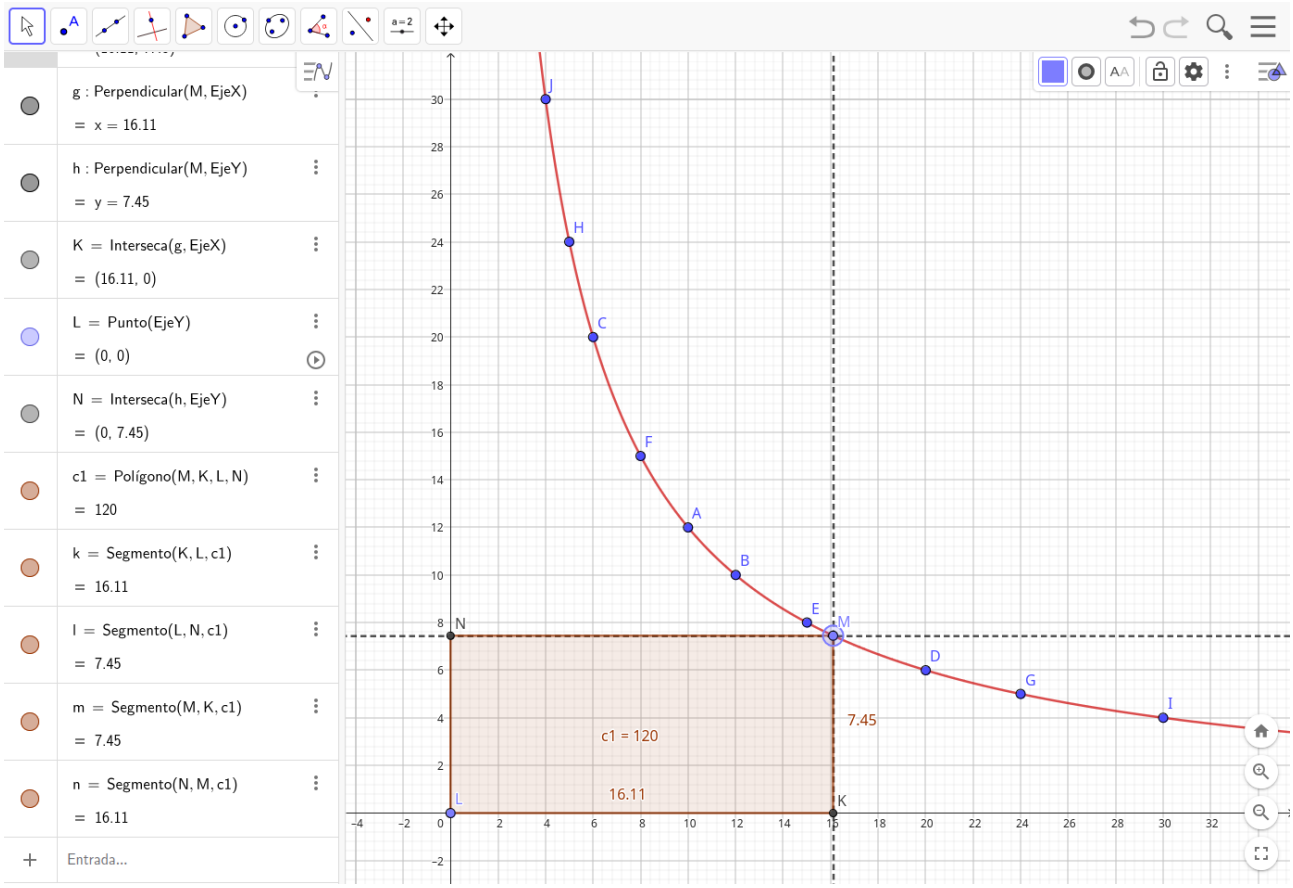


Figura 2.56: Al mover el punto M creado sobre la curva obtenemos una familia infinita de rectángulos cuya área siempre es $120cm2$.

Ahora, dada cualquier valor de lado de base es posible encontrar el valor de altura correspondiente, por ejemplo para $x = 8,5cm$:

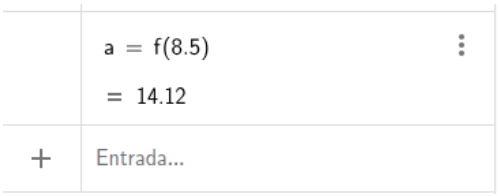


Figura 2.57: El rectángulo mide entonces $8,5cm$ de base y $14,12cm$ de altura, que puede corroborarse calculando su multiplicación.

Formalización

En la etapa de formalización podemos definir varios conceptos y definiciones que estuvimos trabajando anteriormente: Sabemos ahora que la relación entre el área de un rectángulo y sus lados genera una curva en el plano si se grafican los lados como pares ordenados. Esa curva recibe el nombre de *hipérbola* o *curva hiperbólica*, y la función $f(x) = \frac{k}{x}$ donde k es un valor constante, x la variable independiente e y la variable dependiente se denomina función de proporcionalidad inversa y tiene la característica de que a medida que una variable aumenta, la otra disminuye. Decimos que las las dos magnitudes variables son inversamente proporcionales.

En el problema la gráfica de la función (hipérbola) solo mostraba una de sus ramas. Por ejemplo para la función $f(x) = \frac{1}{x}$:

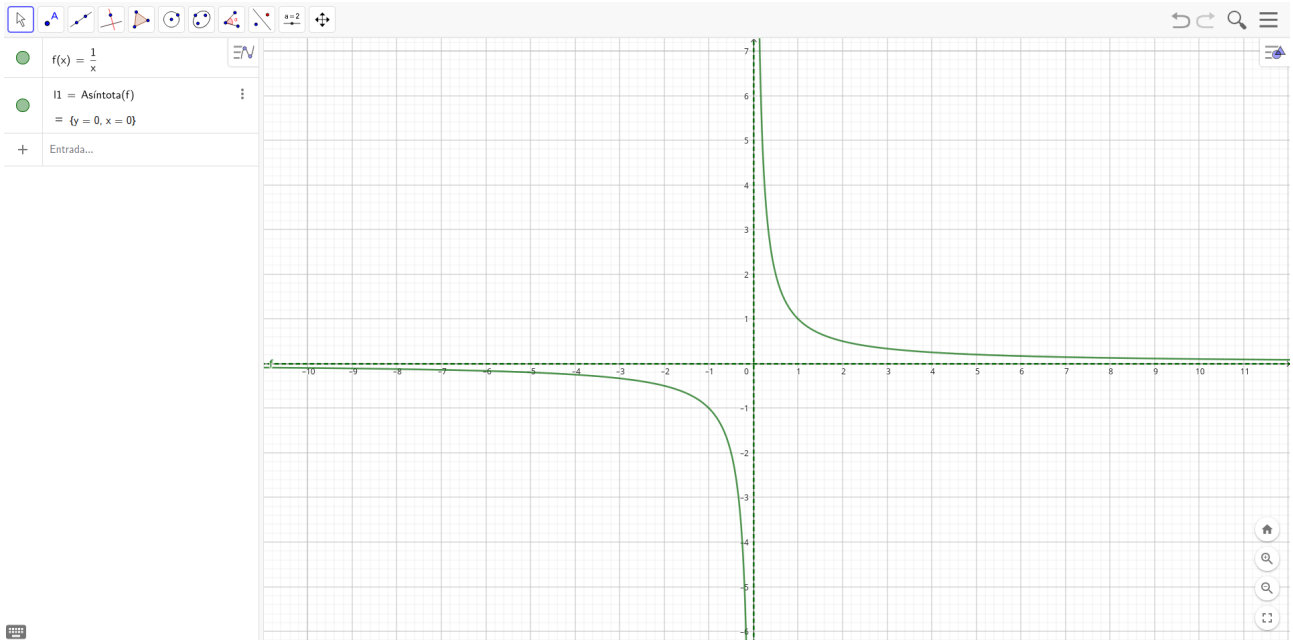


Figura 2.58: Esta función presenta dos curvas con simetría central.

Si corresponde, también podrán definirse sus asíntotas, así como los corrimientos de la función desde el origen.

2.2.6. Funciones exponenciales

Nombre: Crecimiento de bacterias.

Resumen: La actividad trata sobre el crecimiento exponencial de una población de bacterias a lo largo del tiempo. Del análisis de la actividad surge el concepto de función exponencial.

Objetivo: Se busca introducir el concepto de la función exponencial.

Saberes: Funciones, potenciación.

Edad: 14 a 15 años.

Preparación: En esta actividad se plantea la utilización de la Planilla de Cálculo. Por ello es importante que el docente sea paciente con el alumnado que no está familiarizado con este tipo de herramientas. Si bien se plantea la utilización de fórmulas en los casilleros, también es posible que los alumnos usen la calculadora para obtener los valores iterativos y los vayan anotando en las casillas correspondientes a la hora de armar la tabla de valores.

Planteo

En un laboratorio se está experimentando con una población de bacterias, donde se busca estudiar el crecimiento en condiciones favorables a partir de ciertas condiciones iniciales. La masa inicial de la población de bacterias es de $20g$, y al comparar hora tras hora se obtiene que siempre crece un $10\,\%$ más de lo que había en la hora pasada.

¿Qué masa tiene pasada una hora? ¿Y a la segunda hora? ¿Cuál será la masa luego de $5hs$? ¿Y luego de $24hs$? ¿Puedes describir el comportamiento de crecimiento? ¿Puedes graficar en un sistema de ejes cartesianos el comportamiento de crecimiento (*hora* versus *masa*)? ¿Qué fórmula puede describir este comportamiento?

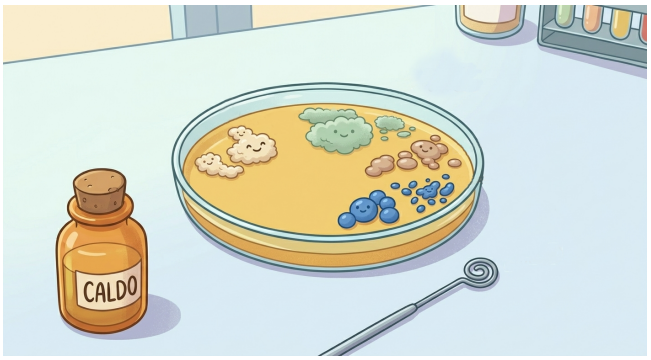


Figura 2.59: Imagen ilustrativa de una placa de Petri donde se reproducen las bacterias. Generada por Gemini IA y modificada por el autor.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: Se trata de una población de bacterias que crece en un laboratorio, cada hora crece un $10\,\%$ su masa, hora tras hora. La masa inicial es de $20g$, y se pide conocer ese valor pasadas 1, 2, 5 y 24 horas. También se solicita describir el crecimiento de población de esa bacteria y graficar en un sistema de ejes cartesianos cada hora versus su masa. Por último se pide una fórmula que permita calcular su masa.

2. *Pensar una estrategia*: Este problema puede ser trabajado en una etapa individual por algunos minutos y luego de forma grupal, con el objetivo de fomentar el debate entre alumnos.
   La estrategia inicial será responder las preguntas mediante la utilización de cuentas muy sencillas de porcentaje. La dificultad se presentará al intentar responder la tercera pregunta, cuando se solicita calcular la masa pasadas las $24hs$ del experimento, ya que como veremos más adelante la utilización de cálculos porcentuales para calcular la *masa* a cada *hora* es iterativo, es decir, se necesita de la *masa* en la *hora* anterior para calcular la *masa* actual.

Es probable que algunos alumnos intenten, erróneamente, utilizar siempre la masa inicial para el cálculo de la masa actual. El docente deberá estar atento a esta situación para intervenir con preguntas que refieran a la re-lectura del enunciado.
Para organizar mejor el trabajo el docente puede sugerir armar una tabla con las columnas «*hora*» y «*masa*», que luego servirá para graficar la función.
Por último, es posible que los alumnos no logren diseñar una fórmula para el cálculo de *masa* por *hora*, por lo que podrá resolverse junto al docente en la etapa de validación. Es necesario que todos los grupos puedan redactar un párrafo donde puedan expresar cómo hacen para calcular la *masa* de bacterias, ya que servirá como base para la obtención de la fórmula.

3. *Ejecutar el plan:* Las primeras operaciones podrán ser calculadas en la carpeta del alumno en la etapa individual, luego el docente agrupará a los alumnos para que sigan trabajando en equipo.
Para responder las primeras preguntas se podrá avanzar con los siguientes cálculos. Partiendo de los $20g$ iniciales, a la hora de iniciado el experimento la población crecerá un $10\,\%$, es decir:
$20g + 20g \times 10\,\% = 20g + 20g \times 10/100 = 20g + 200/100g = 20g + 2g = 22g$
Para la segunda hora se toma este valor y se repite el procedimiento:
$22g + 22g \times 10\,\% = 24,2g$
En este momento el docente podrá promover un pequeño debate entre grupos, asegurando que las respuestas se hayan respondido correctamente. Esto permitirá observar si algún grupo intentó calcular la masa a partir de la inicial, $20g + 20g \times 2hs \times 10\,\%$ pensando en un comportamiento lineal de crecimiento.
Para calcular la masa de la población de bacterias a la $5ta$ hora de iniciado el procedimiento habrá que continuar la operatoria desde la $2da$ hora. A medida que se involucran más cálculos será mayor la probabilidad de errores, ya que un cálculo necesita del anterior para poder completarse.
Para organizarse mejor el docente podrá sugerir el uso de una tabla de valores dentro de la «Hoja de cálculo» de *GeoGebra*, con la utilización de algunas fórmulas:

	A	B	
1	20	$= A1 + A1 \times 0.1$	Toma el valor de la casilla $A1$ y le suma el $10\,\%$
2	$= B1$	$= A2 + A2 \times 0.1$	El resultado de $B1$ lo reingresa en $A2$ para luego sumarle el $10\,\%$
3	$= B2$	$= A3 + A3 \times 0.1$	Se itera de igual forma...
4	$= B3$	$= A4 + A4 \times 0.1$	...
5	$= B4$	$= A5 + A5 \times 0.1$	...hasta obtener el valor de la masa a la $5ta$ hora en $B5$.

Cuadro 2.1: Fórmulas en la «Hoja de Cálculo».

En *GeoGebra* quedará así:

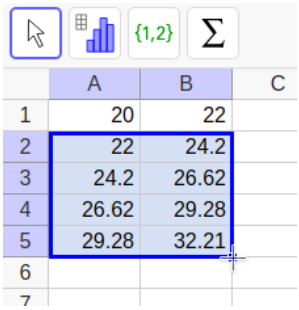
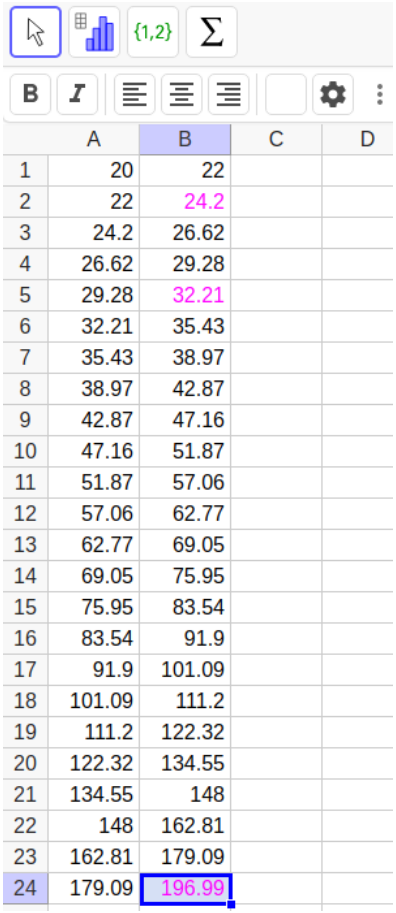


Figura 2.60: Como en cualquier planilla de cálculo, se puede copiar el valor o fórmula de un casillero arrastrando hacia abajo la selección desde el pequeño cuadrado azul en la esquina inferior derecha. En tal caso solo hace falta completar la fila 2 con la fórmula y luego arrastrar hacia abajo su contenido para generar toda la tabla.

La pregunta que pide calcular la masa de la población de bacterias a las $24hs$ hace difícil el cálculo manual (con calculadora) e iterativo. Sin embargo, con la asistencia de *GeoGebra* su cálculo es muy rápido y automático:



	A	B	C	D
1	20	22		
2	22	24.2		
3	24.2	26.62		
4	26.62	29.28		
5	29.28	32.21		
6	32.21	35.43		
7	35.43	38.97		
8	38.97	42.87		
9	42.87	47.16		
10	47.16	51.87		
11	51.87	57.06		
12	57.06	62.77		
13	62.77	69.05		
14	69.05	75.95		
15	75.95	83.54		
16	83.54	91.9		
17	91.9	101.09		
18	101.09	111.2		
19	111.2	122.32		
20	122.32	134.55		
21	134.55	148		
22	148	162.81		
23	162.81	179.09		
24	179.09	196.99		

Figura 2.61: El valor para las 24 horas es de 196.99 gramos.

El docente deberá proponer que cada grupo escriba un párrafo breve con un instructivo que permita entender cómo se calcula cada valor. Luego intentarán escribir una fórmula que permita encontrar el valor sin necesidad de recurrir a la iteración de valores.
Será muy fácil realizar en *GeoGebra* la gráfica de los valores en un sistema de ejes cartesianos, «hora versus masa». Para ello agregamos una nueva columna entre A y B donde ingresamos los números 1 al 24 representando las horas[9], luego seleccionamos todos los valores y creamos una «lista de puntos» que se verán graficado inmediatamente en la «Vista gráfica».

[9]Para agregar una columna entre A y B se selecciona la columna B y luego con el botón derecho se elije en el menú contextual la opción de «Insertar a la izquierda»

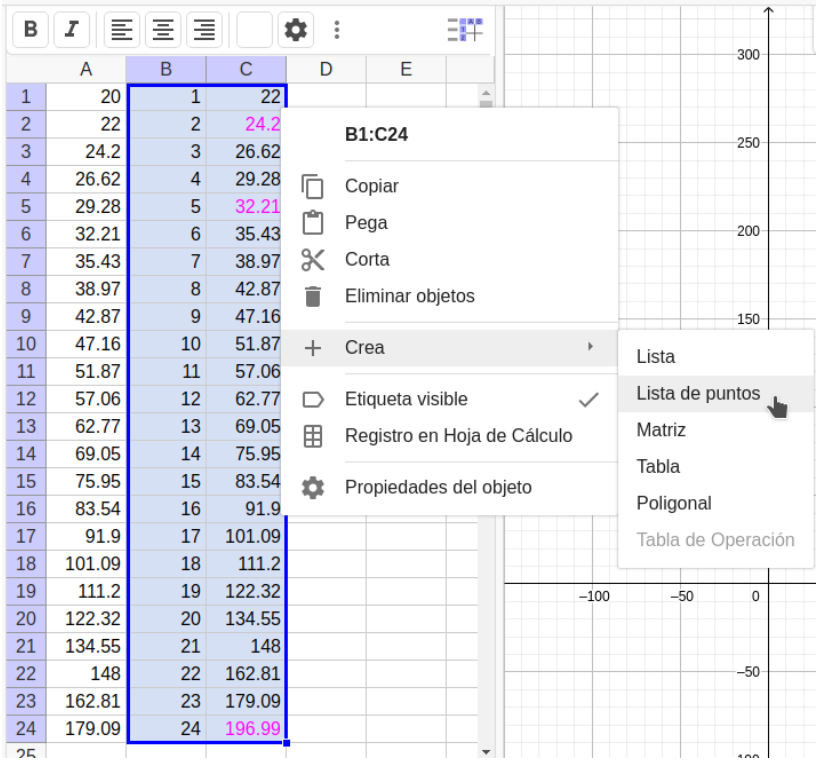


Figura 2.62: Los puntos se crean automáticamente junto con una lista que los agrupa.

Luego podemos acomodar un poco la escala de los ejes para observar mejor cómo se ven los puntos graficados:

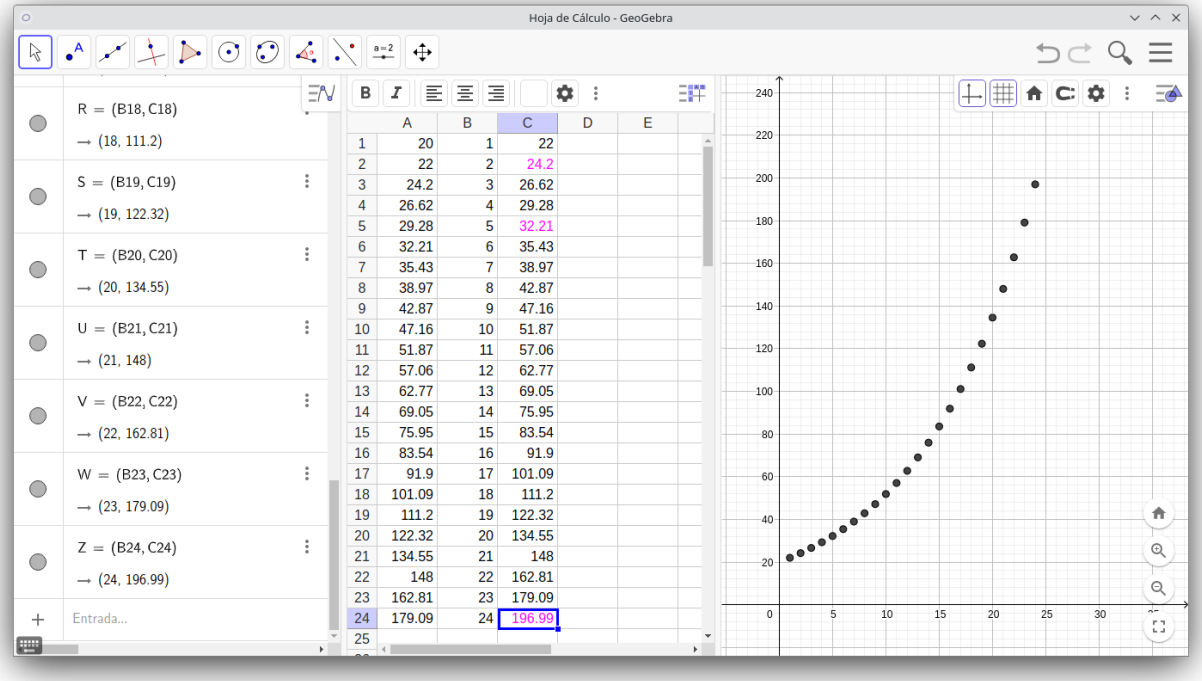


Figura 2.63: Los puntos no siguen una tendencia *lineal*, sino que generan una curva *creciente*.

Dependiendo los conocimientos previos y la práctica en la operatoria algebraica es de esperar que no todos los grupos lleguen a una fórmula, lo cual no será un problema ya que en la etapa de validación el docente guiará la construcción de la fórmula buscada.

4. *Verificar y repensar la solución.* Si el docente logró una etapa de debate para las dos primeras preguntas entonces es esperable que todos los grupos alcancen los mismos resultados. Sin embargo puede variar, entre grupos, la forma de cálculo de porcentajes. Por ejemplo, para calcular el 10 % sobre los $20g$ iniciales se puede hacer de forma directa $20g \times 1.1 = 22g$, equivalente al el 110 % de $20g$.

Validación

La etapa de validación se centrará en la obtención de la fórmula que permita resumir el modelo del problema en una función. Para ello retomaremos la tabla anterior pero no simplificaremos los cálculos, sino que mostraremos su estructura para tratar de descubrir un patrón.

	A	B	
1	20	20×1.1	La masa inicial se multiplica por 1.1, que es como expresamos el 10 % sobre el total
2	20×1.1	$20 \times 1.1 \times 1.1$	Ahora el valor inicial es el mismo que la casilla $B1$ y se vuelve a multiplicar por 1.1
3	$20 \times 1.1 \times 1.1$	$20 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1$	Se itera de igual forma que en el paso anterior...
...	...	...	...
t	$20 \times \overbrace{1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times ... \times 1.1}^{t-1}$	$20 \times \overbrace{1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times ... \times 1.1}^{t} = 20 \times 1.1^t$	...y al final se obtiene la masa inicial (*gramos*) multiplicada por el factor (1.1) elevado a la t (*horas*)

Cuadro 2.2: Hacia la elaboración de una fórmula.

El docente deberá promover en los alumnos recordar la definición de potenciación, indagando con preguntas como ¿qué significa la expresión $1.1 \times 1.1 \times 1.1$? ¿cómo se puede simplificar la notación de esa expresión? ¿cuál es la operación que permite calcular la multiplicación de un número por si mismo una cierta cantidad de veces?

Probemos ahora la fórmula para distintos valores ya calculados:

$$a = 20 \cdot 1.1^2$$
$$\rightarrow 24.2$$

$$b = 20 \cdot 1.1^5$$
$$\rightarrow 32.21$$

$$c = 20 \cdot 1.1^{24}$$
$$\rightarrow 196.99$$

Figura 2.64: Los valores calculados con la fórmula coinciden con los obtenidos en la tabla anterior.

Formalización

La fórmula que permite encontrar el valor de la masa «m», multiplicada por el factor «1.1» y pasadas «t» horas es: $m = 20 \times 1.1^t$[10]. Pero como existe un carácter funcional en la dependencia de la masa respecto al tiempo lo expresamos así, como una función:

$f(t) = 20 \times 1.1^t$, la llamamos *Función Exponencial*, 20 es el *coeficiente* o *factor*, 1.1 es la *base* y «t» el *exponente*.

[10]El valor 1.1 es el factor de crecimiento o factor de variación, que resulta de la suma de la base inicial (100 % es 1) más el crecimiento (10 % es 0.1).

Si graficamos esa función en *GeoGebra* veremos cómo se ajusta perfectamente a lo calculado:

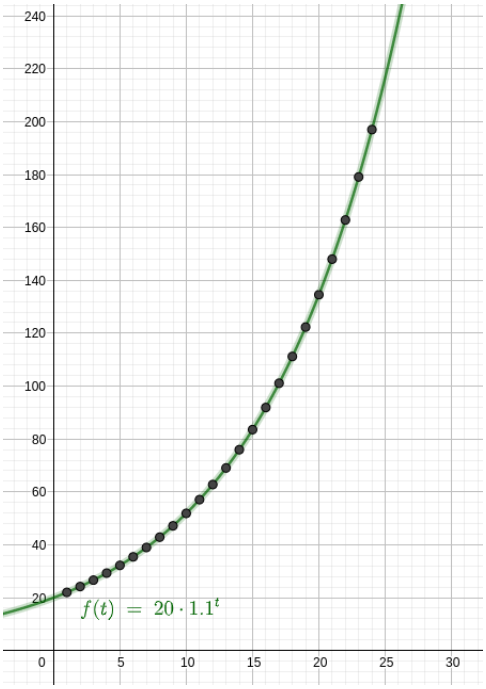


Figura 2.65: La gráfica de la función f, en verde, pasa por todos los puntos calculados.

Entonces, en particular para este modelo y cualquier masa inicial «m», base «b» y tiempo «t» podemos describir la función exponencial como:

$f(t) = m \times b^t$

Por ejemplo, para una masa inicial de $5g$ de bacterias donde la población se duplica al cabo de una hora se tiene la función:

$f(t) = 5 \times 2^t$

Y el caso general, para cualquier situación donde el modelo se ajuste a una función exponencial es:

$f(x) = a.b^x$con $a\epsilon\mathbb{R}$y $b\epsilon\mathbb{R}^+ - \{1\}$

El docente podrá explicar en detalle, con ejemplos, por qué la definición limita los valores de la base. Asimismo podrá mostrar distintas situaciones donde la función exponencial sirve como modelo matemático:

- Interés compuesto para plazos fijos donde el valor depositado se deja invertido junto al interés generado en cada intervalo de tiempo.
- Sustancias radioactivas donde la masa se reduce en cierto porcentaje a medida que pasa el tiempo.
- El modelo de *Malthus*, donde crece ilimitadamente la población de ecosistemas dadas ciertas características respecto a recursos y depredadores.
- En economías estables, donde el precio crece exponencialmente de acuerdo al índice de inflación.
- Depreciación del valor de bienes materiales a medida que pasa el tiempo.
- Curva de aprendizaje de tareas (repetitivas) de un individuo a lo largo del tiempo.

Posteriormente se podrán trabajar y graficar ejemplos o modelos de funciones exponenciales con distintos valores de a y b para lograr un completo entendimiento de la función.

2.2.7. Funciones trigonométricas

Nombre: Salida del sol.

Resumen: El problema trata sobre la altura en que se observa el sol al mediodía, mes a mes, y donde hay que reconocer que el patrón observable del fenómeno es una onda sinusoidal.

Objetivo: Introducir a las funciones sinusoidales, seno y coseno.

Saberes: Funciones, análisis de funciones, razones trigonométricas.

Edad: 15 a 16 años.

Preparación: En este problema se utiliza la hoja de cálculo como entrada de tabla. Como alternativa el docente puede proponer ingresar cada punto de forma individual. En cualquier caso es necesario generar una lista para luego poder realizar el ajuste sinusoidal, por lo que el docente deberá estar atento a los errores de tipeo, para que las gráficas se realicen correctamente.

Planteo

Un astrónomo registra todos los días $1ro$ de cada mes la altura en grados del Sol justo al mediodía. Ha anotado estas observaciones durante varios años, viendo que los valores se repiten de forma aproximada. He aquí la tabla para el año 2023:

Mes	Ángulo respecto al horizonte
Enero	$71,939$
Febrero	$66,09$
Marzo	$58,525$
Abril	$48,468$
Mayo	$38,996$
Junio	$32,25$
Julio	$30,897$
Agosto	$35,63$
Septiembre	$45,376$
Octubre	$57,05$
Noviembre	$67,986$
Diciembre	$73,481$

Cuadro 2.3: Registro mensual de altura promedio del Sol en grados decimales.

Quiere entender qué significan estos valores, y cómo es que se repiten año tras año, ¿puedes ayudarlo?

Para llevar adelante esta tarea, aquí tienes un listado de preguntas que puedes responder para ayudarlo mejor:

1. ¿Cómo es la gráfica de esos valores en un sistema de ejes cartesianos?
2. ¿Qué forma tienen los puntos marcados?
3. ¿Reconoces esa gráfica?
4. ¿Qué valores *máximos* y *mínimos* se observan? ¿cuándo se dan esos valores y qué significan en el contexto del problema?
5. Los datos aportados en la tabla son del año 2023, sin embargo, ¿puedes predecir cómo continúa en el tiempo por otro año más?
6. ¿Puedes determinar en qué hemisferio se encuentra haciendo estas observaciones? ¿Qué sucederá en otras locaciones del planeta?

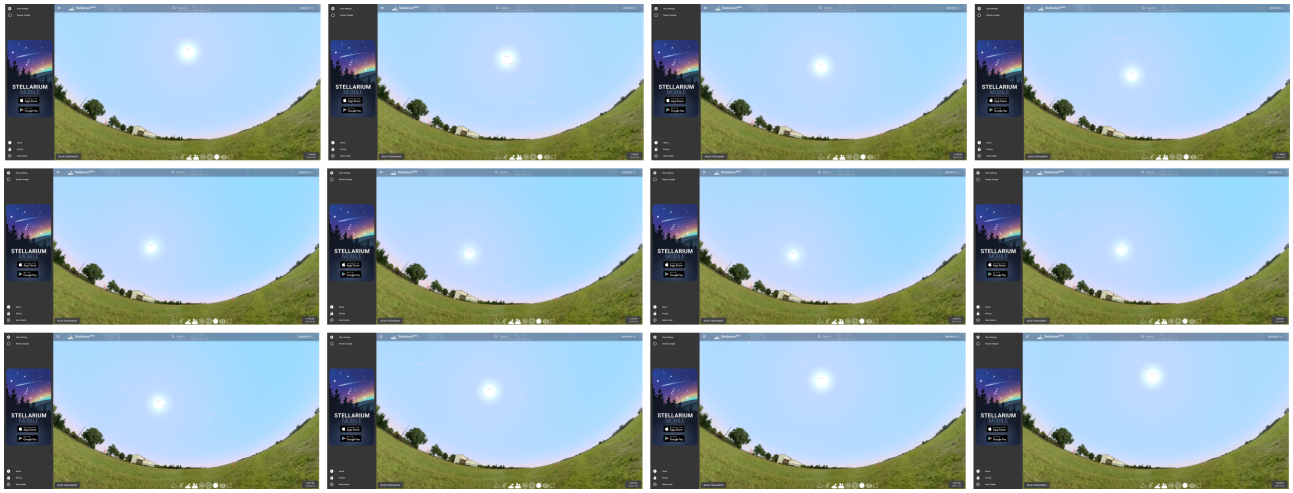


Figura 2.66: Altura relativa del sol en latitud aproximada de 33° Sur para cada uno de los meses del año, simulado en el planetario de software libre Stellarium. Mediante una proyección del tipo «ojo de pez» se observa que para los distintos meses la altura aparente del sol en el cielo es distinta.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: La situación trata sobre la altura del sol respecto del horizonte a determinada hora durante todos los meses, por un año. La tabla contiene los valores de ángulos para el 1*er* día de cada mes, en grados. El objetivo es poder entender el fenómeno observado buscando algún patrón de comportamiento.

2. *Pensar una estrategia*: La situación-problema planteada tiene una serie de preguntas guionadas donde el docente deberá estar especialmente atento, cotejando las respuestas. Opcionalmente el docente puede proponer grupos de trabajo para fomentar diversidad de estrategias así como la argumentación de las respuestas.
   Para responder las preguntas es necesario graficar la tabla, por lo que es probable que los alumnos asignen números a los meses y marquen los puntos de forma individual.

3. *Ejecutar el plan:* Se podrá graficar la tabla convirtiendo cada mes en un número y luego ir graficando cada par de valores[11] de fila como puntos en el plano:

x	y
1	71, 939
2	66, 09
3	58, 525
4	48, 468
5	38, 996
6	32, 25
7	30, 897
8	35, 63
9	45, 376
10	57, 05
11	67, 986
12	73, 481

Cuadro 2.4: La misma tabla con registros, pero con números en la primer columna, representando a cada uno de los meses del año.

En *GeoGebra* se verá así:

[11] Se los puede graficar uno a uno, o bien todo junto mediante su ingreso en la vista de «Hoja de cálculo». Una vez ingresados se los selecciona y luego haciendo clic derecho «Crea → Lista de puntos».

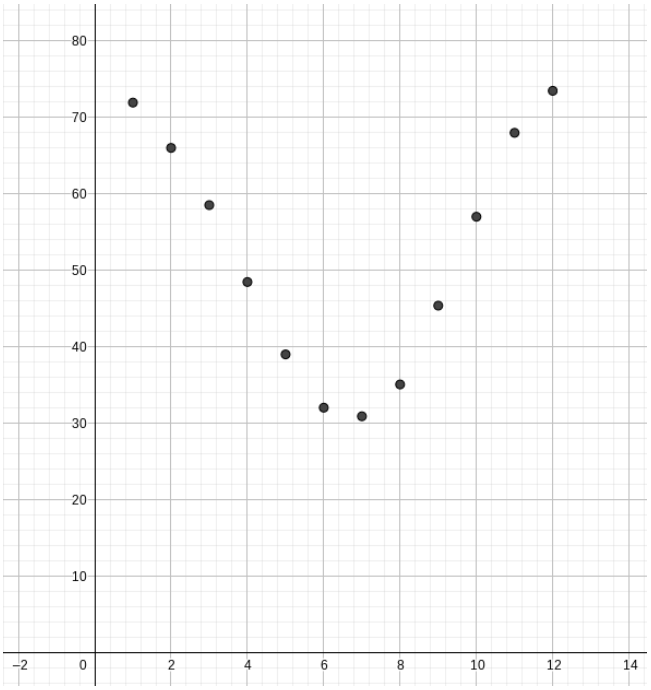


Figura 2.67: La gráfica muestra los puntos de la tabla. Se adaptaron los ejes para poder ver todos los puntos.

Una vez marcados los puntos podemos contestar las preguntas que indagan sobre su forma. Entonces, *«¿qué forma tienen los puntos marcados?, ¿reconoces esa gráfica?»*.
Los puntos parecen estar dispuestos en una especie de V, o U. Algunos alumnos podrán asociarla directamente a una función cuadrática, ya que su forma parece coincidir. En tal caso el docente deberá observarles que en tanto en extremo derecho como el izquierdo pareciera que la gráfica vuelve a curvarse. Como es sabido, estos modelos didácticos promueven el pensamiento crítico donde el maestro es guía, y no debe afirmar ni negar sus argumentos para no condicionar sus respuestas. Para reforzar esta idea podemos utilizar en *GeoGebra* la herramienta «*Poligonal*()», que permite unir los puntos:

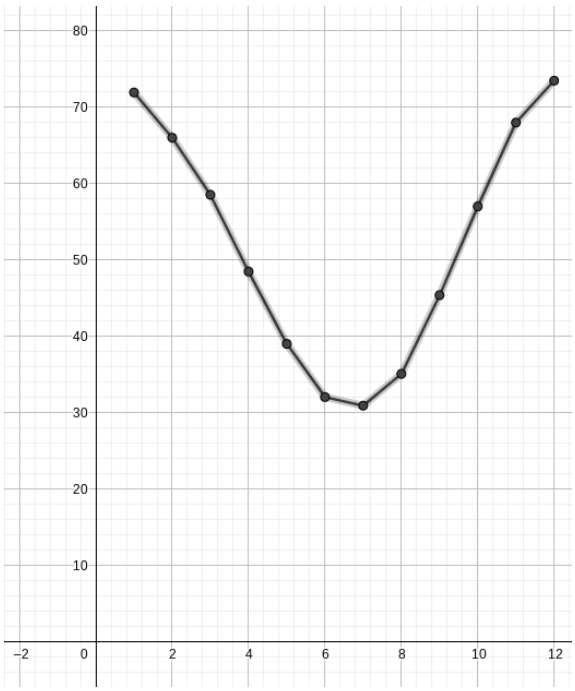


Figura 2.68: La poligonal tiene forma de V.

«¿Qué valores máximos y mínimos se observan? ¿cuándo se dan esos valores y qué significan en el contexto del problema?» Por lo que se puede observar en la gráfica el valor *máximo* se da en Diciembre, con $73,481$ y el *mínimo* en Julio con $30,897$. También aquí el docente podrá observar que existe otro punto «casi» *máximo*, en Enero, solo para que lo tengan en cuenta más adelante.
Queda entonces por contestar la pregunta sobre su significado en el contexto del problema. Algunos podrán argumentar que hacia Enero y Diciembre el sol está más alto que el resto del año, y que hacia Junio/Julio el sol está más abajo. Lo que nos lleva a pensar en las estaciones, que corresponden al verano e invierno respectivamente. El docente deberá hacer notar este comportamiento y su relación con las horas de sol que hay en cada estación, algo que los alumnos pueden comprobar de forma empírica.
Posteriormente en la guía de preguntas se dice que *«Los datos aportados en la tabla son del año* 2023*, sin embargo, ¿puedes predecir cómo continúa en el tiempo por otro año más?»*, a lo que los alumnos con seguridad responderán que los valores deberían repetirse o al menos ser aproximadamente iguales para cada estación, dependiendo del día en que se mida. La pregunta está diseñada con el objetivo de que ellos puedan entender el concepto de frecuencia para este tipo de función, y que descarten otro tipo de modelo de gráfica como la ecuación cuadrática o polinómica, si es que se da el caso. En este sentido el docente podrá proponer que grafiquen los mismos valores pero para los meses del 13 al 24, dando continuidad a la gráfica:

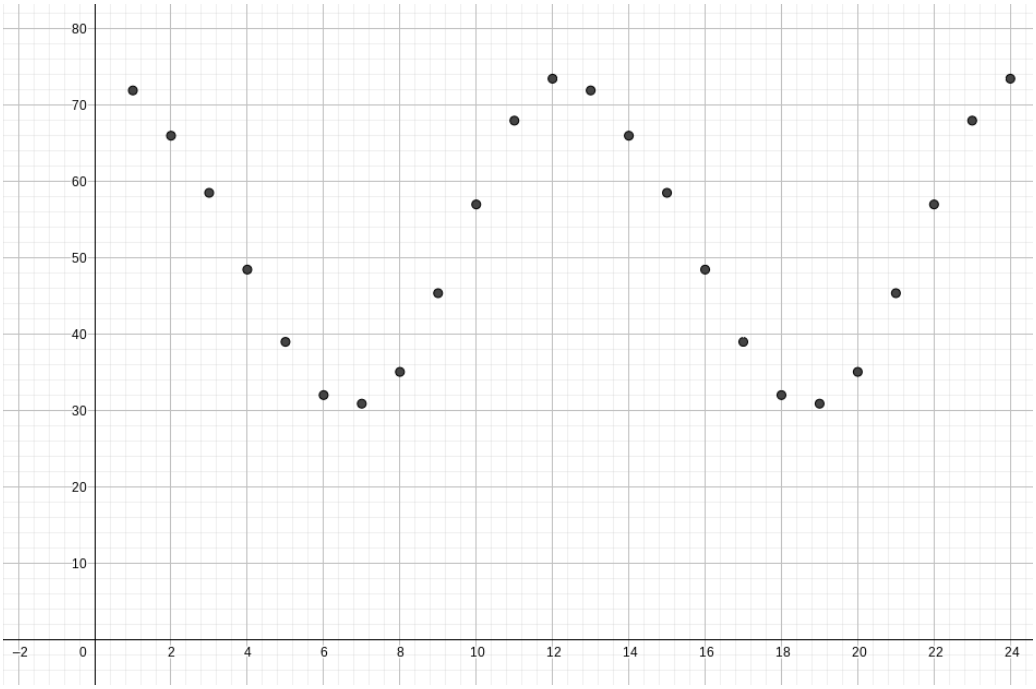


Figura 2.69: Se observa una especie onda en forma de W.

Lógicamente, si pudiéramos continuar mes a mes veríamos que la curva que une todos los puntos se parece a una onda que baja y sube repetidamente.
«¿Puedes determinar en qué hemisferio se encuentra haciendo estas observaciones? ¿Qué sucederá en otras locaciones del planeta?» El docente podrá complementar estas preguntas con referencias a las estaciones, y en el caso de que no surja naturalmente podrá comentarles cómo se dan las estaciones en el hemisferio norte como en el sur. Claramente esta medición ha sido realizada en el hemisferio sur.

4. *Verificar y repensar la solución.* Si el docente ha trabajado en grupos es probable que se hayan dado debates argumentados en cada uno de ellos, por lo que ahora se podrán exponer las respuestas de forma integral en toda la clase. Como ya se ha dicho, entre las respuestas erróneas que pueden darse se encuentra la suposición de que la gráfica es una parábola o tiene forma de «V», al no considerar la continuidad temporal, año tras año. El docente podrá comentar, si es que los alumnos no lo saben, cómo la posición del eje de la tierra en cada estación del año y qué sucede en cada latitud, incluso poniendo casos extremos como la situación de los polos con sus noches y días que duran meses.

Validación

Una vez resuelto el problema el docente guiará a los alumnos hacia la obtención de la fórmula que permite modelar este fenómeno. Como se ha visto, la gráfica es una onda con forma de «V» que se repite una y otra vez, año tras año. Se explicará que la forma buscada tiene el nombre de «onda sinusoidal» y que puede modelarse en *GeoGebra* mediante un comando que permite ajustar estadísticamente todos los valores: «$AjusteSeno()$». Para utilizar este comando hay que ingresar en el argumento la lista de puntos: $AjusteSeno(\{A, B, C...\})$.

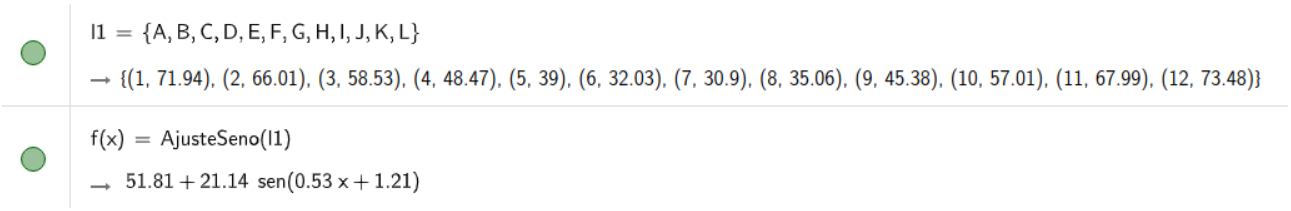


Figura 2.70: En este caso se creó la lista y luego se utilizó la variable «$l1$» como argumento del comando «$AjusteSeno()$»

La gráfica queda así:

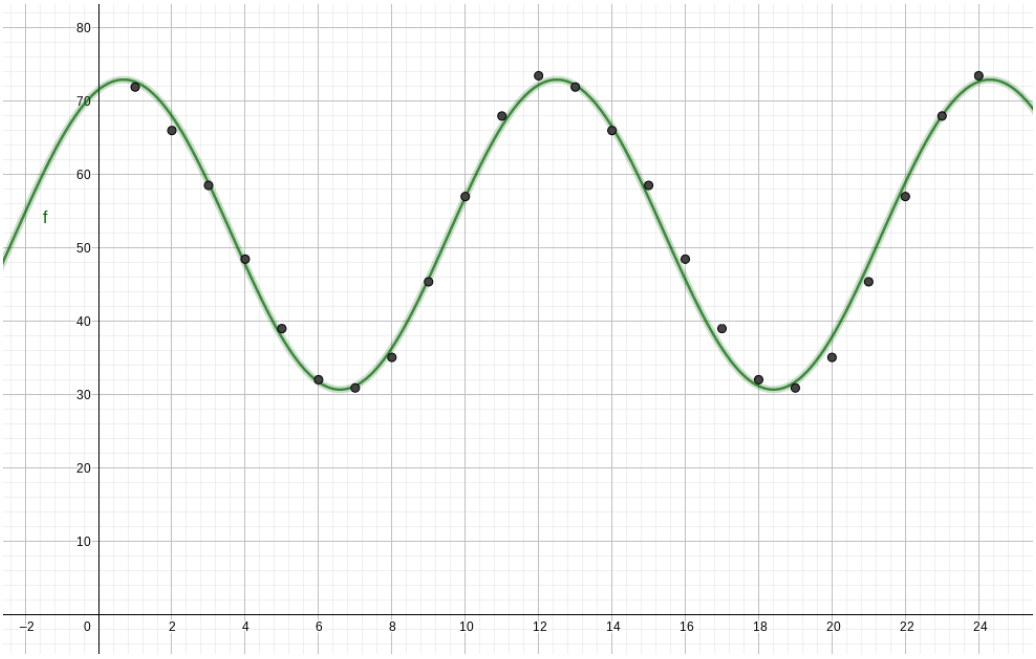


Figura 2.71: En la gráfica se observan también los puntos de los meses 13 a 24, que no fueron utilizados para aproximar la fórmula de la gráfica.

Vemos que la gráfica es una curva con montañas y valles que se repite en ciclos de un año.

En esta parte el docente podrá, con un nuevo ejemplo, mostrar cómo se obtiene la misma forma de onda al analizar la altura del sol en otros horarios o en otras latitudes. Por ejemplo, la siguiente tabla pertenece a la Ciudad de *Ushuaia*:

Mes	Ángulo respecto al horizonte
Enero	71, 939
Febrero	66, 09
Marzo	58, 525
Abril	48, 468
Mayo	38, 996
Junio	32, 25
Julio	30, 897
Agosto	35, 63
Septiembre	45, 376
Octubre	57, 05
Noviembre	67, 986
Diciembre	73, 481

Cuadro 2.5: Registros de alturas promedio mensuales para *Usuhaia*, en grados decimales.

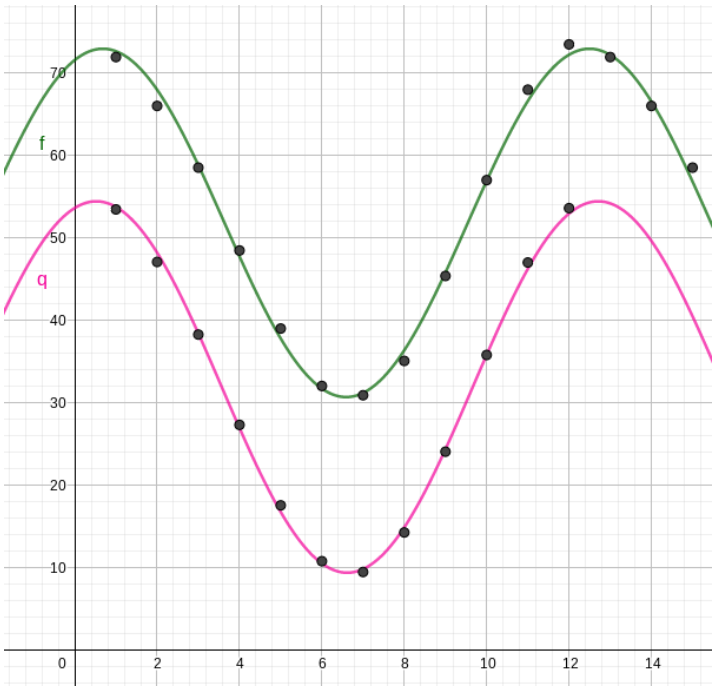


Figura 2.72: La gráfica magenta corresponde a la tabla de la Ciudad de Ushuaia.

Con este segundo ejemplo se podrá indagar si la locación donde se observó la curva verde se encuentra más al norte o más al sur que Ushuaia.

Para analizar las características de la gráfica que se modeliza en el planteo simplificaremos la gráfica usando deslizadores en *GeoGebra*. Es decir, estudiaremos la fórmula encontrada por *GeoGebra* $f(x) = 51.81 + 21.14sen(0.53x + 1.21)$ pero con valores más sencillos de manipular.

Para ello, en una nueva ventana del programa, crearemos la siguiente fórmula en la Vista Algebraica:

$$a \times sen(b \times x + c) + d$$

La fórmula es muy similar a las otras (hemos cambiado el orden de los términos), pero con la diferencia de que los valores de a, b, c y d son deslizadores en *GeoGebra*, es decir, unas especies de variables que asignan valores numéricos predeterminados y pueden cambiarse manualmente. Al ingresar esa fórmula en el programa se crean automáticamente los deslizadores:

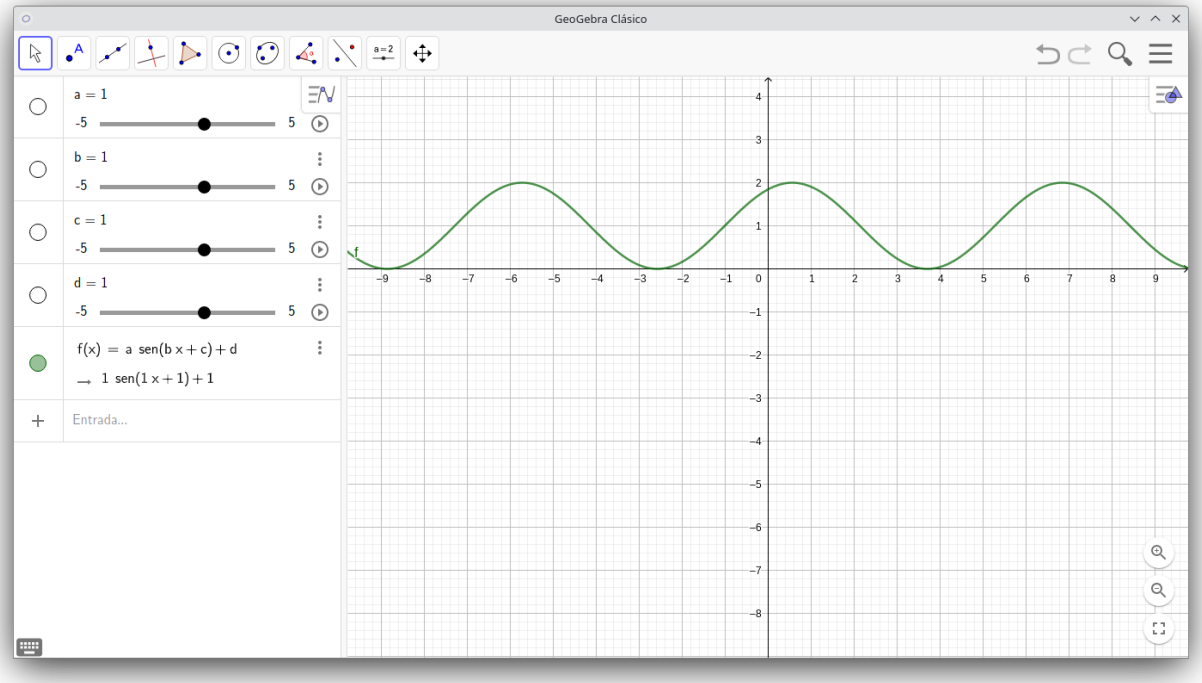


Figura 2.73: Los deslizadores toman valor «1» por defecto al crearlos.

Los deslizadores nos ayudarán a entender qué papel cumplen en la fórmula, ya que al mover el punto sobre la barra de deslizamiento la gráfica cambiará en algún sentido. El punto puede deslizarse manualmente o de forma automática haciendo clic en el símbolo ▶. Se espera que con la asistencia del docente los alumnos puedan explorar por sí mismos cada valor y describan lo que observan.

> Importante: Antes de empezar crearemos una versión sin modificar de esa misma fórmula, para poder comparar.

Empezando por el deslizador del valor «a», observamos que la gráfica se expande y contrae verticalmente:

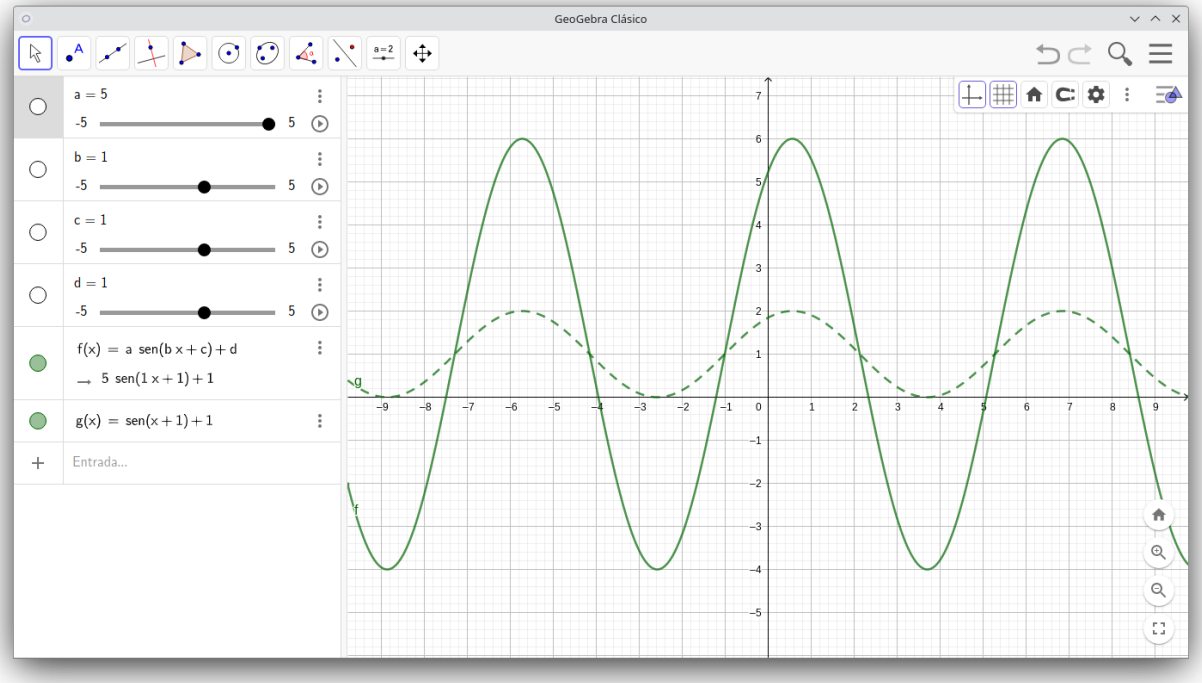


Figura 2.74: El valor «*a*» en 5 produce picos más altos para arriba y abajo respecto a la original (en linea punteada).

Al analizar el valor «b» notamos que para valores mayores a 1 y menores a -1 la gráfica hace un efecto como si fuera un resorte que se contrae (horizontalmente). Otra forma de verlo es que la curva parece oscilar con mayor frecuencia. Entre 1 y -1 sucede lo contrario, la gráfica se estira y parece oscilar con menos frecuencia.

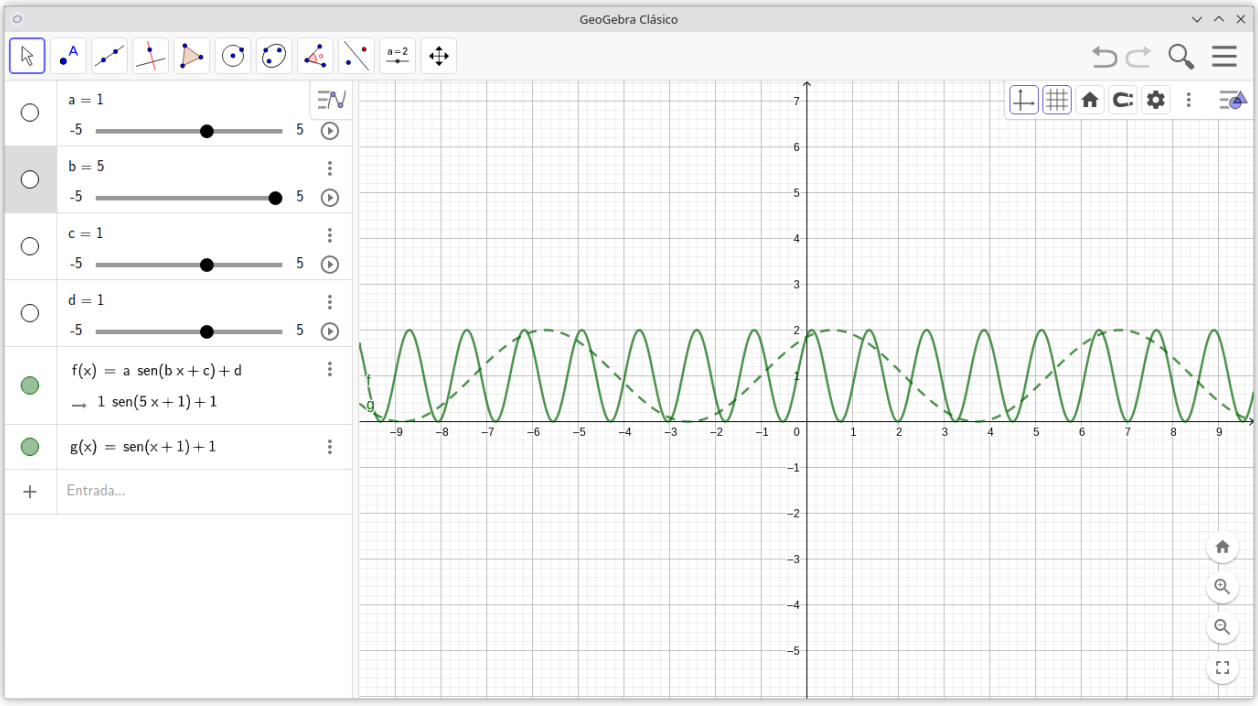


Figura 2.75: El valor de «*b*» es 5, la gráfica parece comprimirse horizontalmente.

Para el valor «*c*» observamos que la gráfica solo se desplaza horizontalmente, sin cambiar de forma o tamaño.

El docente podrá indagar un poco más sobre a partir de qué valores les parece a los alumnos que la gráfica se desplaza hacia la derecha o izquierda, sin embargo esto podrá profundizarse más adelante.

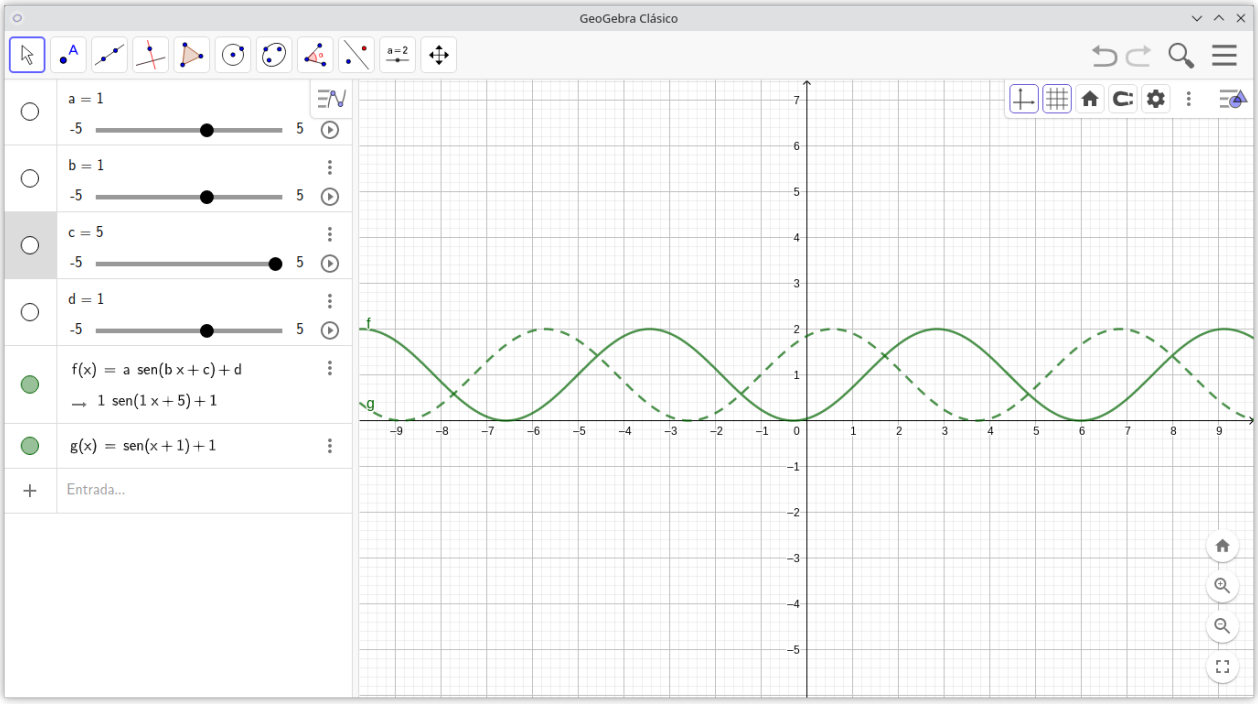


Figura 2.76: Las formas se conservan, pero la gráfica parece desplazarse en el mismo sentido que el eje «x».

Por último, al analizar el valor «d» observamos que el desplazamiento es vertical, conservando la forma y tamaño de la gráfica original:

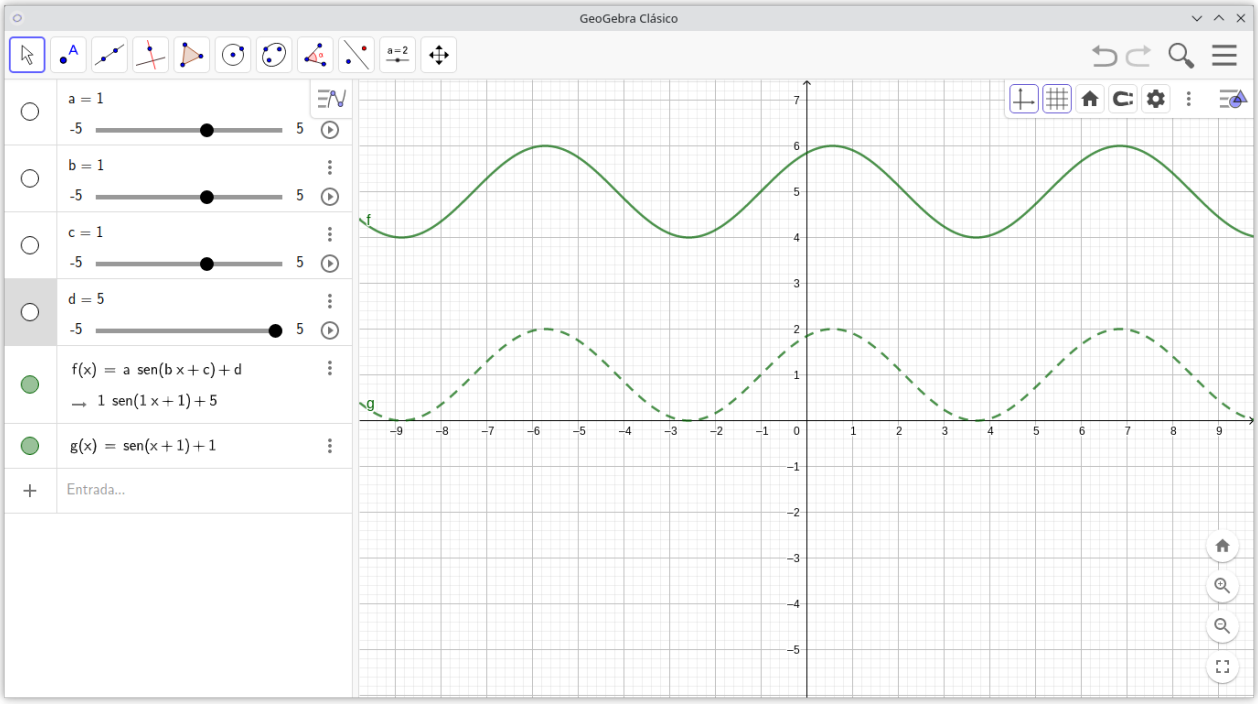


Figura 2.77: La función se desplazó hacia arriba para «d» en el valor 5.

El docente podrá profundizar en cada caso, sin embargo el objetivo principal en esta etapa es entender que

las transformaciones pueden analizarse desde el análisis de la fórmula, aunque algunas de ellas puede que sean más difíciles de descifrar.

En particular para el caso de la fórmula que modeliza el problema $f(x) = 51.81 + 21.14sen(0.53x + 1.21)$ podemos darnos cuenta que los *máximos* y *mínimos* se pueden conseguir combinando el corrimiento vertical con la *amplitud*:

$51.81 + 21.14 = 72.95$

$41.81 - 21.14 = 30.67$

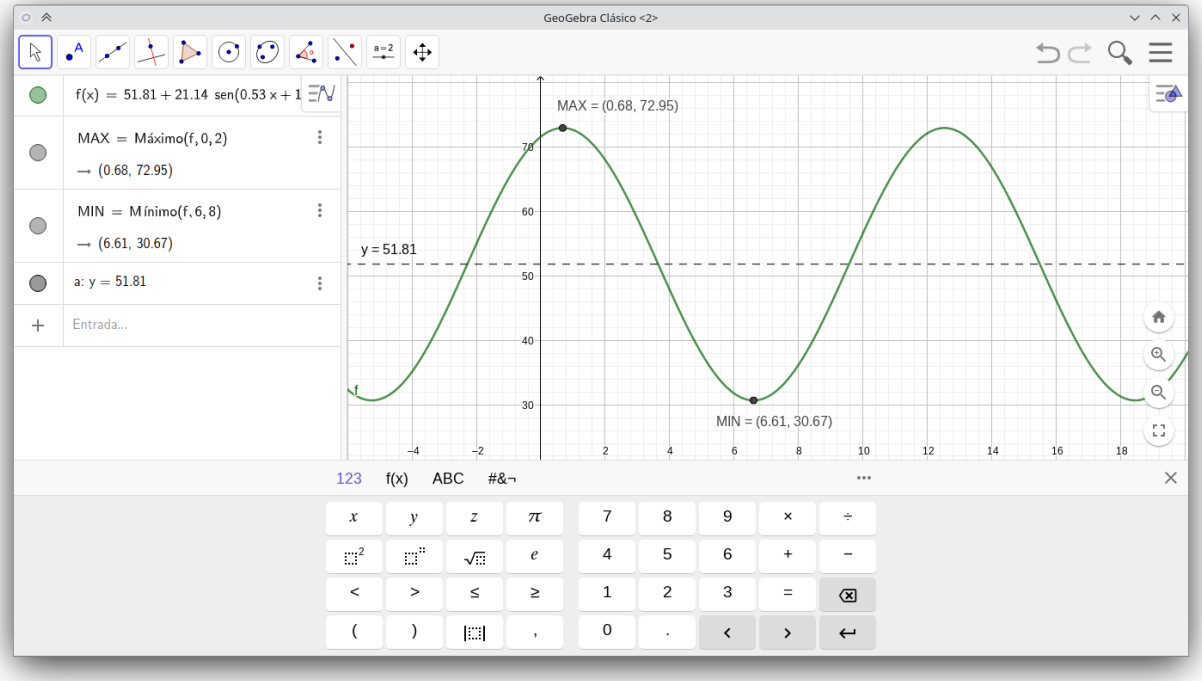


Figura 2.78: Se observa la linea punteada en 51.81 (desplazamiento vertical) y los extremos *máximos* y *mínimos*, coincidentes con los calculados.

Respecto del desplazamiento horizontal podemos estudiar, como se ha visto, lo que sucede en el argumento de «$sen()$». Si reconfiguramos la expresión $0.53x+1.21$ como $0.53(x+\frac{1.21}{0.53}) = 0.53(x+2.28)$. Ahora, si comparamos la gráfica original $51.81+21.14sen(0.53(x+2.28))$ con $51.81+21.14sen(0.53(x+0))$ observaremos el desplazamiento hacia la izquierda en -2.28 unidades (abscisa del punto «A»):

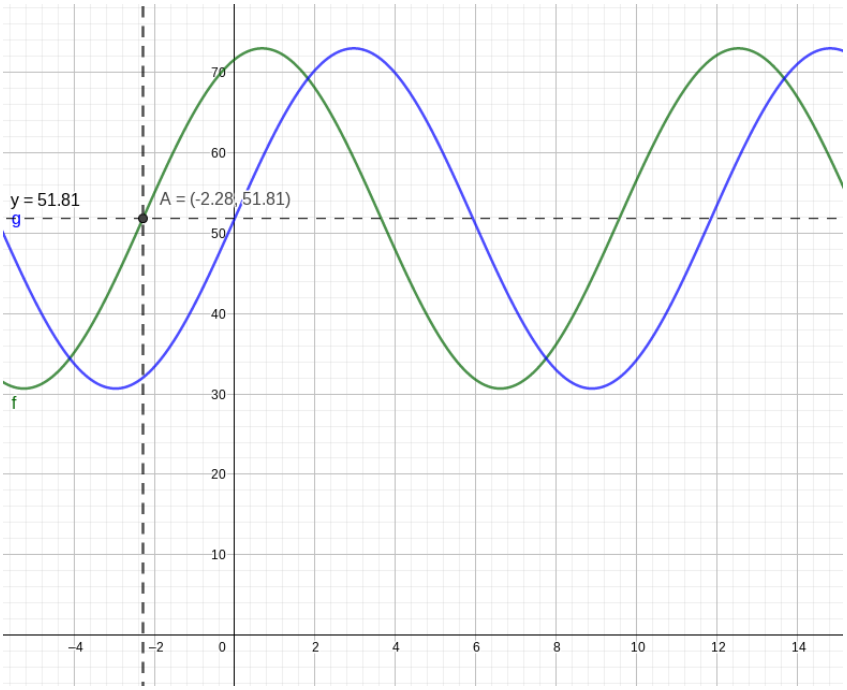


Figura 2.79: La gráfica «g» en azul es la versión sin desplazamiento horizontal de la gráfica original «f». La linea punteada vertical, de abscisa -2.28 indica el desplazamiento desde el 0.

Por último, vamos a analizar el valor 0.53 que acompaña a la variable independiente. Para ello compararemos las gráficas de las siguientes expresiones entre sí: $sen(x)$ y $sen(0.53x)$.

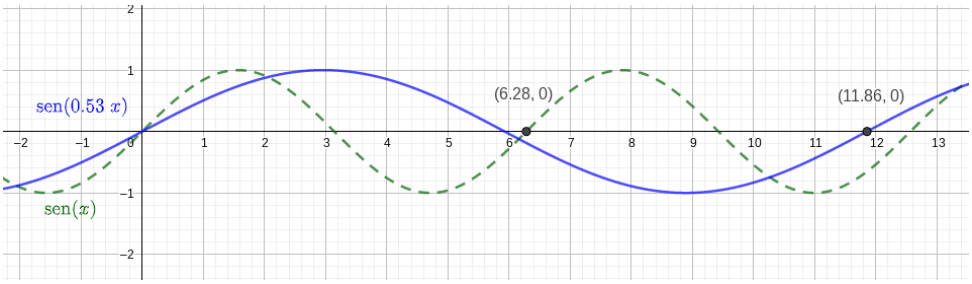


Figura 2.80: La gráfica azul continua pertenece a $sen(0.53)$, la gráfica verde punteada es $sen(x)$.

Como hemos visto, la gráfica de este tipo de curva se repite continuamente una y otra vez. La gráfica verde completa su ciclo en el valor $x = 6.28$, y la azul en $x = 11.86$, casi el doble. Al comparar los coeficientes que acompañan a la variable independiente «x», uno es 1 y el otro 0.53, por lo que tiene sentido pensar en que también aquí se observa ese «casi doble» que vimos en la gráfica. Recordemos que anteriormente dijimos que *Al analizar el valor «b» notamos que para valores mayores a* 1 *y menores a* -1 *la gráfica hace un efecto como si fuera un resorte que se contrae (horizontalmente)... Entre* 1 *y* -1 *sucede lo contrario, la gráfica se estira y parece oscilar con menos frecuencia.* Es decir que la gráfica de la expresión $sen(0.53x)$ parece ser más «estirada» que la de $sen(x)$. El docente podrá en este momento hacer que los chicos experimenten con los deslizadores, para corroborar ese comportamiento. Posteriormente puede hacerles notar que $6.28 = 2\pi$, lo que será clave para definir el concepto de *período* y *frecuencia*.

Formalización

En la etapa institucional tendremos que definir varios conceptos. En primer lugar, que el modelo que trabajaron es el de *Función Trigonométrica*, más precisamente la *Función Seno* o $f(x) = sen(x)$ en su expresión más simple, que genera una gráfica de *Curva Sinusoidal*. Habrá que comentar que existen dos funciones trigonométricas principales que son *Coseno* y *Tangente*, que ya han visto como razones trigonométricas con anterioridad.

La función *Seno* se puede definir de la siguiente forma:

$f(x) = a \times sen(b \times x + c) + d$ o $f(x) = a\, sen(b\, x + c) + d$, donde

a es la *amplitud* y representa un cambio en los valores *máximos* y *mínimos* de la función.

b es la *frecuencia*, y permite conocer el período de la función mediante $\frac{2\pi}{|b|}, b \neq 0$[12].

c es conocido como ángulo de fase y permite conocer el desplazamiento horizontal haciendo $x = -\frac{c}{b}$.

d permite desplazar verticalmente el eje de la función $y = d$ [13].

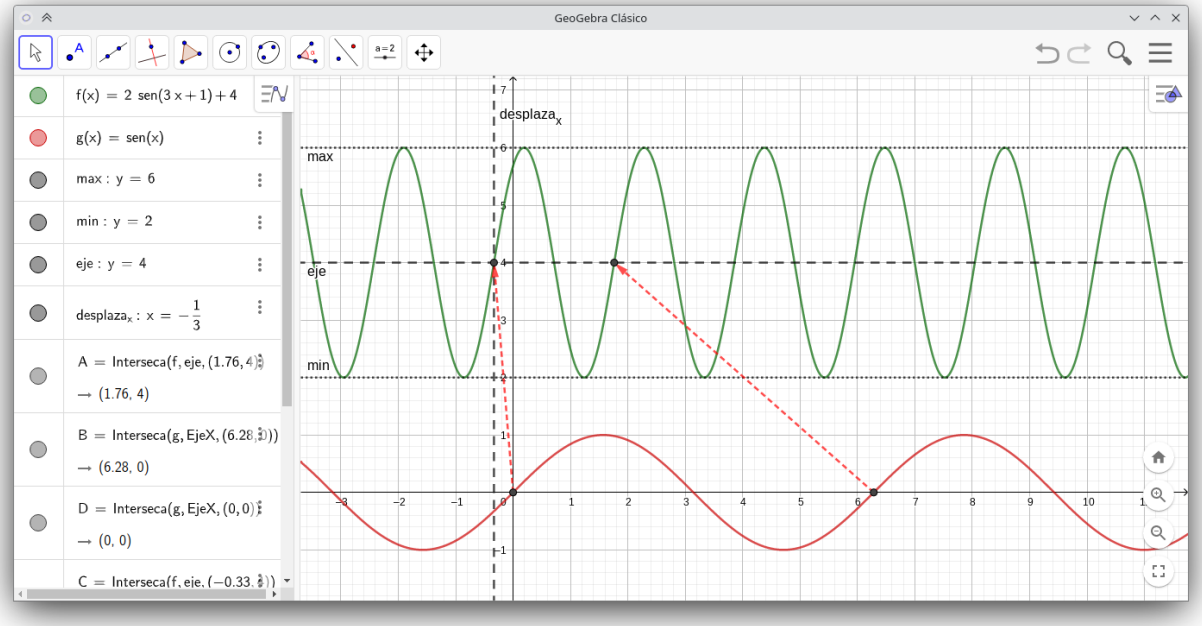


Figura 2.81: En este ejemplo se pueden notar todas las transformaciones de la función f comparada con g.

Sin embargo, alguna bibliografía indica otra forma de definirla:

$f(x) = a\, sen(\omega(x - \phi)) + d$, donde

a es la *amplitud* y representa un cambio en los valores *máximos* y *mínimos* de la función.

ω es la *frecuencia*, y permite conocer el *período* de la función mediante $\frac{2\pi}{|\omega|}, \omega \neq 0$[14].

ϕ es conocido como *ángulo de fase* y permite conocer el *desplazamiento horizontal* haciendo $x = \phi$.

d permite *desplazar verticalmente* el eje de la función $y = d$[15].

[12] Posteriormente el docente podrá analizar con los alumnos que los valores de f se repiten cada $\frac{2\pi}{b}$.
[13] También es el promedio de los *máximos* y *mínimos* de la función.
[14] Posteriormente el docente podrá analizar con los alumnos que los valores de f se repiten cada $\frac{2\pi}{b}$
[15] También es el promedio de los *máximos* y *mínimos* de la función.

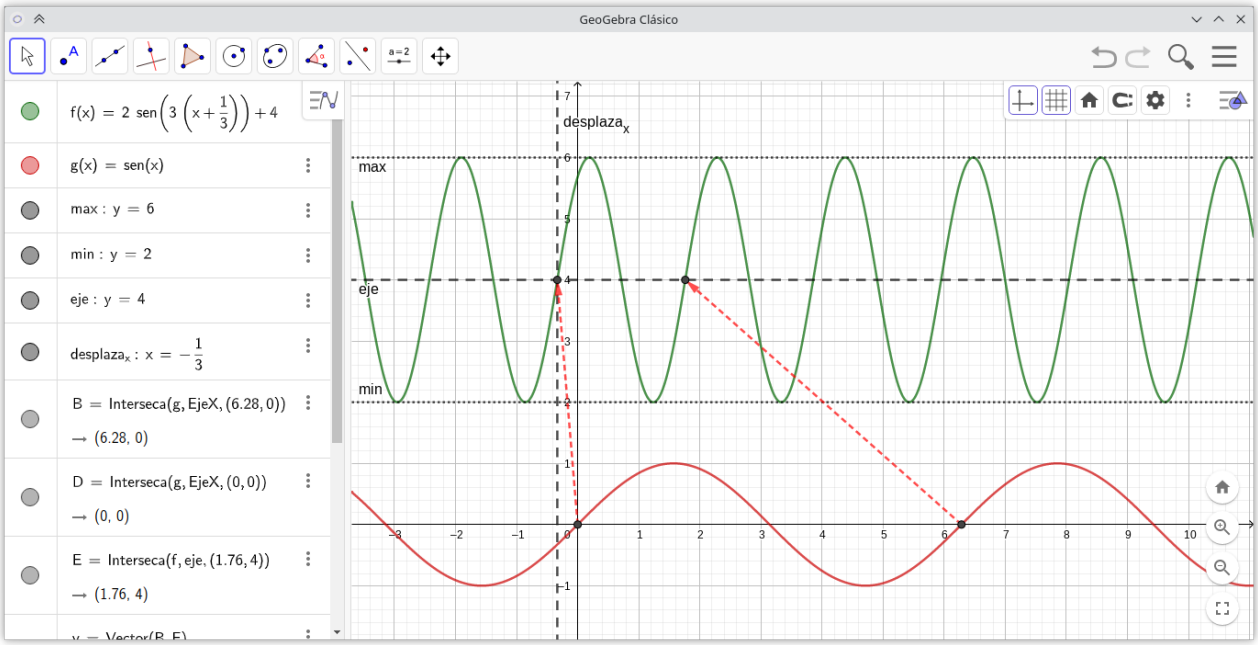


Figura 2.82: El mismo ejemplo anterior, pero con la fórmula adaptada a esta segunda forma.

Posteriormente el docente podrá dar otros ejemplos de funciones *Seno* o bien problemas que impliquen modelos sinusoidales para su resolución. Además al trabajar con las funciones *Coseno* y *Tangente* se verá que las transformaciones se dan de forma análoga a la ya vista.

2.2.8. Función valor absoluto

Nombre: El tesoro de los piratas.

Resumen: El problema está diseñado para que los alumnos se enfrenten a un desafío genuino: encontrar el punto de desembarco que minimice la suma de las distancias a dos puntos. Los estudiantes deben descubrir por sí mismos cómo calcular las distancias, y cómo el concepto de valor absoluto está involucrado en ese cálculo.

Objetivo: Redefinir la distancia como diferencia absoluta, reconociendo que la distancia entre dos puntos es siempre positiva, y plasmarlo en una función.

Saberes: Función lineal. Distancia en el plano. Valor absoluto.

Edad: 13 a 15 años.

Preparación: En este planteo es muy importante que el docente esté pendiente de que los alumnos interpreten correctamente el enunciado. Para ello se sugiere dibujar en el pizarrón el primer esquema, aunque luego lo realicen en *GeoGebra*. Esto evitará malentendidos a la hora de argumentar los cálculos.
Por otra parte, el docente se debe asegurar de que los alumnos poseen conocimiento de la definición y operaciones con «Valor absoluto», necesario para modelizar el concepto de distancia que se trabaja en el problema.

Planteo

Unos piratas escondieron un tesoro en una isla rectilínea muy larga. Te han dado pistas sobre la ubicación de un tesoro, pero cada una indica una posición diferente: Una dice que está en B, a 4 kilómetros al este de la única aldea de la isla (A) y la otra pista dice que está en C, a 2 kilómetros al oeste de la aldea. Pero se sabe que los piratas son muy mentirosos, sobre todo cuando se trata de tesoros escondidos, por lo tanto no hay certeza de dónde escondieron el tesoro.

Te encuentras en tu barco frente a la isla con dos equipos que irán uno a cada punto, B y C, para encontrar el tesoro. Eliges un punto para desembarcar y piensas: ¿Me conviene desembarcar en la aldea o en algún otro lugar de la isla? ¿qué distancia hay hacia un punto y hacia el otro?, ¿puedo encontrar una posición de desembarco que haga que la suma total de las distancias sea la mínima posible?

Figura 2.83: Imagen ilustrativa del problema del tesoro de los piratas. Generada por Gemini IA y modificada por el autor.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema trata sobre una gran isla con forma de linea recta en donde hay un tesoro escondido en dos posibles locaciones, una al este de una aldea y otra al oeste, a $4km$ y $2km$ respectivamente. Se pide calcular cuál es el mejor lugar de desembarco para que la distancia a ambos puntos sea la menor posible. Además hay que calcular la distancia desde el punto de desembarco hacia ambos lugares donde podría estar el tesoro escondido. Por último se pide encontrar una posición donde la suma de esas distancias sea la mínima posible.

2. *Pensar una estrategia*: La estrategia que mejor se ajusta a este problema es, probablemente, la de prueba y error. El docente propondrá que dibujen, que hagan un esquema de la isla para visualizar mejor los datos. Mediante preguntas podrá guiar a la clase a que lleven ese esquema a *GeoGebra*, utilizando la recta numérica como soporte para los datos.

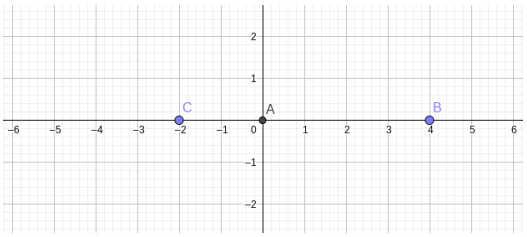


Figura 2.84: El eje horizontal representa la isla. El punto A en el origen es la aldea, y los otros dos son los posibles lugares donde está escondido el tesoro.

- *Ejecutar el plan:* Con este esquema es más sencillo hacer cálculos. Los alumnos podrán probar lugares de desembarco aleatorios:

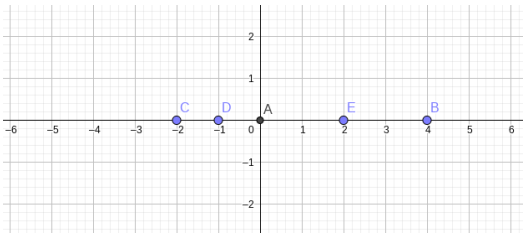


Figura 2.85: Los puntos D, A y E son posibles lugares donde el barco toca tierra.

- Si $D = (-1, 0)$ es el punto de desembarco, entonces: $DC + DB = 1 + 5 = 6km$
- Si $A = (0, 0)$ es el punto de desembarco, entonces: $AC + AB = 2 + 4 = 6km$
- Si $E = (2, 0)$ es el punto de desembarco, entonces: $EC + EB = 4 + 2 = 6km$

Existe la posibilidad de que algún alumno elija los puntos C o B como lugares de desembarco. También que elijan lugares por fuera del segmento $\overline{CB}$. Si esto no ocurre, el docente podrá intervenir con mucho cuidado en esta etapa haciendo las siguientes preguntas: ¿El barco puede desembarcar en cualquier lugar?, ¿en algún lugar se menciona el tamaño de la isla?, ¿dónde más puede desembarcar, que no sea entre C y B?.

- Si el barco desembarca en $C = (-2, 0)$, entonces solo hay una distancia que calcular: $\overline{CB} = 6km$
- Si el barco desembarca en B, también da el mismo resultado: $\overline{BC} = 6km$

Los alumnos comprobarán que algo distinto sucede si el barco desembarca por fuera del segmento $\overline{CB}$. Tomamos dos puntos aleatorios F y G:

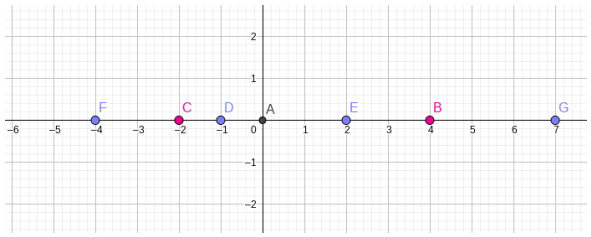


Figura 2.86: Los puntos de desembarco por fuera de $\overline{CB}$ son F y G. Se han cambiado los colores de C y B para resaltar que son los puntos donde puede estar escondido el tesoro.

- La suma de las distancias $\overline{FC}$ y $\overline{FB}$ es $2 + 8 = 10km$
- Por otra parte $\overline{GB} + \overline{GC} = 3 + 9 = 12km$

1. *Verificar y repensar la solución.* Con las respuestas encontradas se pueden contestar las preguntas iniciales: *¿Me conviene desembarcar en la aldea o en otro lugar de la isla? ¿qué distancia hay hacia un punto y hacia el otro?, ¿puedo encontrar una posición de desembarco que haga que la suma total de las distancias sea la mínima posible?*
   Si los piratas desembarcan en cualquier lugar entre C y B (incluidos) la suma de los distancias que recorrerán los equipos en búsqueda del tesoro es $6km$. En cambio si desembarcan a la izquierda (oeste) de C o a la derecha (este) de B la suma de las distancias a dichos puntos será siempre mayor a 6. Podrán verificar esto calculando sumas de distancias a nuevos puntos.

Validación

El docente retomará lo trabajado en al etapa de resolución y formulará las preguntas necesarias para que los alumnos puedan comprobar que la suma de las distancias de cualquier punto de desembarco entre B y C, incluyendo estos puntos, es igual a 6km.Y si el punto está por fuera de los lugares posibles donde está enterrado el tesoro la suma de las distancias a dichos puntos es mayor.

Entonces si $P = (x, 0)$ es el punto de desembarco:

- Cuando$-2 \leq x \leq 4 \Rightarrow dist(\overline{PC}) + dist(\overline{PB}) = 6$,
- En cambio $x < -2$ ó $x > 4 \Rightarrow dist(\overline{PC}) + dist(\overline{PB}) > 6$

El docente podrá introducir ahora un saber previo, que permite redefinir el concepto de distancia como diferencia absoluta[16], recordando además que la distancia nunca toma un valor negativo. Si x y a son los valores de la abscisa de los puntos $P = (x, 0)$ y $Q = (a, 0)$, es decir que están sobre el eje «x», entonces se define que la distancia entre estos puntos es:

- $dist(\overline{PQ}) = |x - a|$

O bien, por definición:

- $dist(\overline{PQ}) = x - a$ si $x \geq a$,
- $dist(\overline{PQ}) = -(x - a)$ si $x < b$

El resultado siempre será positivo. Esto es algo que el docente puede hacerle comprobar a los alumnos con los valores previamente calculados, tomando$B = (4, 0)$ y $C = (-2, 0)$ como los puntos fijos a los cuales hay que calcular la distancia:

- $D = (-1, 0)$, como $-1 < 4$ y $-1 > -2$ entonces $dist(DB) + dist(DC) = -(-1 - 4) + (-1 - (-2)) = -(-5) + (1) = 5 + 1 = 6$,
- $E = (2, 0)$, como $2 < 4$ y $2 > -1$ entonces $dist(EB)+dist(EC) = -(2-4)+(2-(-2)) = -(-2)+(2+2) = 2 + 4 = 6$,
- $F = (-4, 0)$, como $-4 < 4$ y$-4 < -1$ entonces $dist(FB) + dist(FC) = -(-4 - 4) + (-(-4 - (-2))) = -(-8) + (-(-4 + 2)) = 8 + (-(-2)) = 8 + 2 = 10$,
- $G = (7, 0)$, como $7 > 4$ y $7 > -1$ entonces $dist(GB) + dist(GC) = (7 - 4) + (7 - (-2)) = 3 + (7 + 2) = 3 + 9 = 12$

Una vez verificados que los cálculos coinciden con lo previamente desarrollado el docente propone construir la suma genérica de un punto P a los puntos B y C como $dist(PB)+dist(PC) = |x-4|+|x-(-2)| = |x-4|+|x+2|$, que podemos llamar $S(x)$, es decir, a la expresión que permite calcular la sumas de distancias desde el lugar de desembarco a los puntos posibles donde se esconde el tesoro:

$S(x) = |x - 4| + |x + 2|$

Para analizar mejor qué significado tiene esa expresión les pedimos a los alumnos que grafiquen esa función:

[16] Si es necesario el docente deberá recordar el el concepto y definición de «valor absoluto».

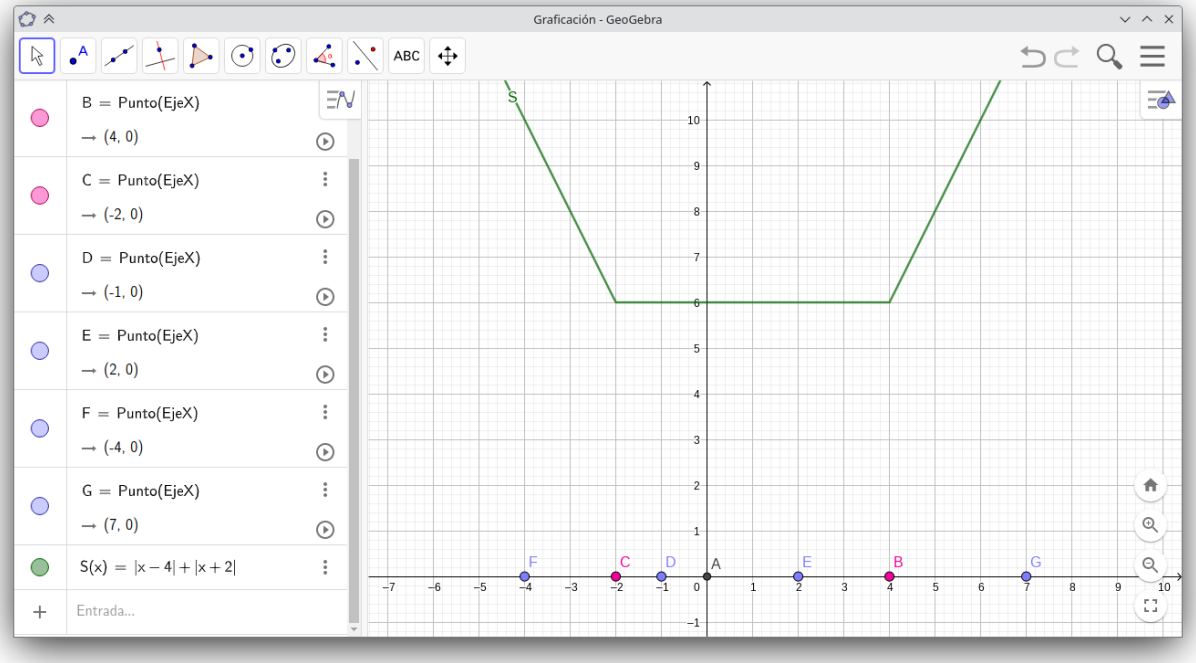


Figura 2.87: La función $S(x)$ posee una forma gráfica distinta a las conocidas, formada por tres tramos rectos.

El docente deberá acompañar la gráfica de la argumentación correspondiente, haciendo notar que los «quiebres» de la función coinciden con las posiciones en el eje de las abscisas de los puntos B y C. Los alumnos podrán dar valores a la función y hacer que *GeoGebra* evalúe o bien haciendo ellos mismos los cálculos según la definición.

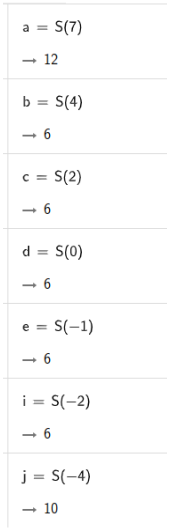


Figura 2.88: La imagen muestra las evaluaciones de S para todos los puntos calculados.

También se podrá optar por calcular, por definición de valor absoluto, qué función corresponde a cada tramo, como si se tratara de una función partida[17]:

- Si $x > 4$, entonces $S(x) = (x - 4) + (x - (-2)) = 2x - 2$,
- Si $-2 \leq x \leq 4$, entonces $S(x) = -(x - 4) + (x - (-2)) = -x + 4 + x + 2 = 6$,

[17] Se deberá tener en cuenta que los alumnos conozcan este tipo de funciones.

- Si $x < -2$. entonces $S(x) = -(x-4) + (-(x-(-2))) = -x+4+(-(x+2)) = -x+4-x-2 = -2x+2$

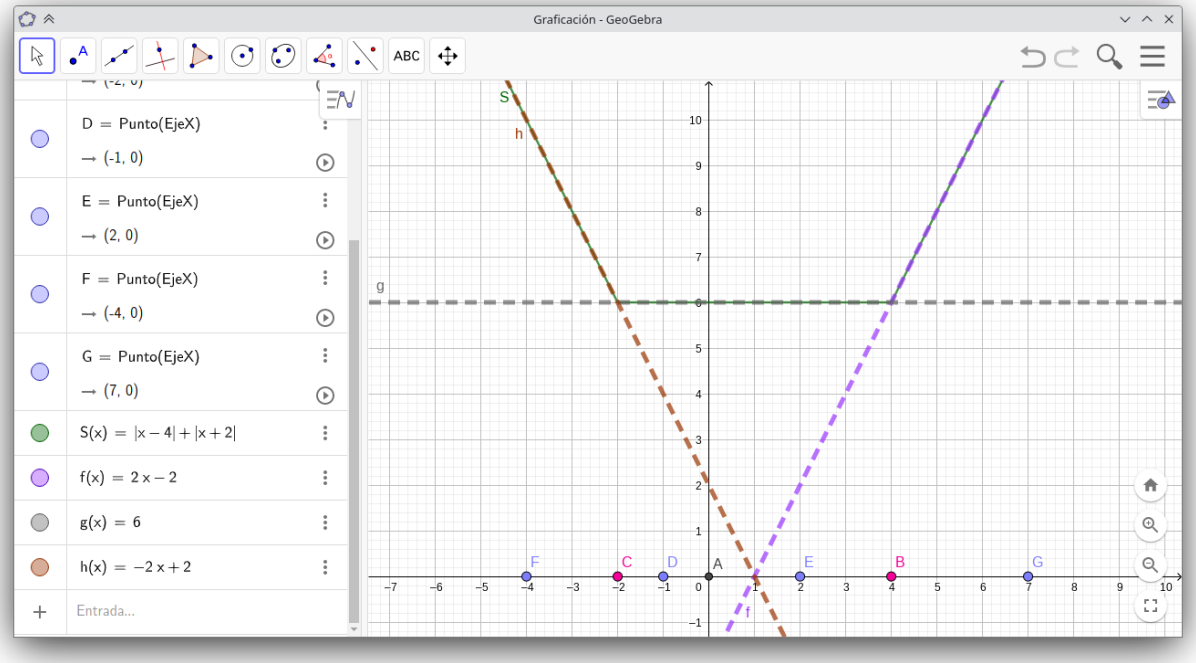


Figura 2.89: Las tres funciones se superponen con $S(x)$.

Formalización

La función S es entonces una función que esta compuesta por una suma de funciones «valor absoluto». La función valor absoluto, denotada como $f(x) = |x|$, es una función matemática que devuelve la distancia (no negativa) de un número real a cero. Esta definición se apoya en la definición de «valor absoluto», vista en la etapa anterior.

La función valor absoluto de un número real x, denotada como $|x|$, se define como:
$|x| = x$, si $x \geq 0$
$|x| = -x$, si $x < 0$

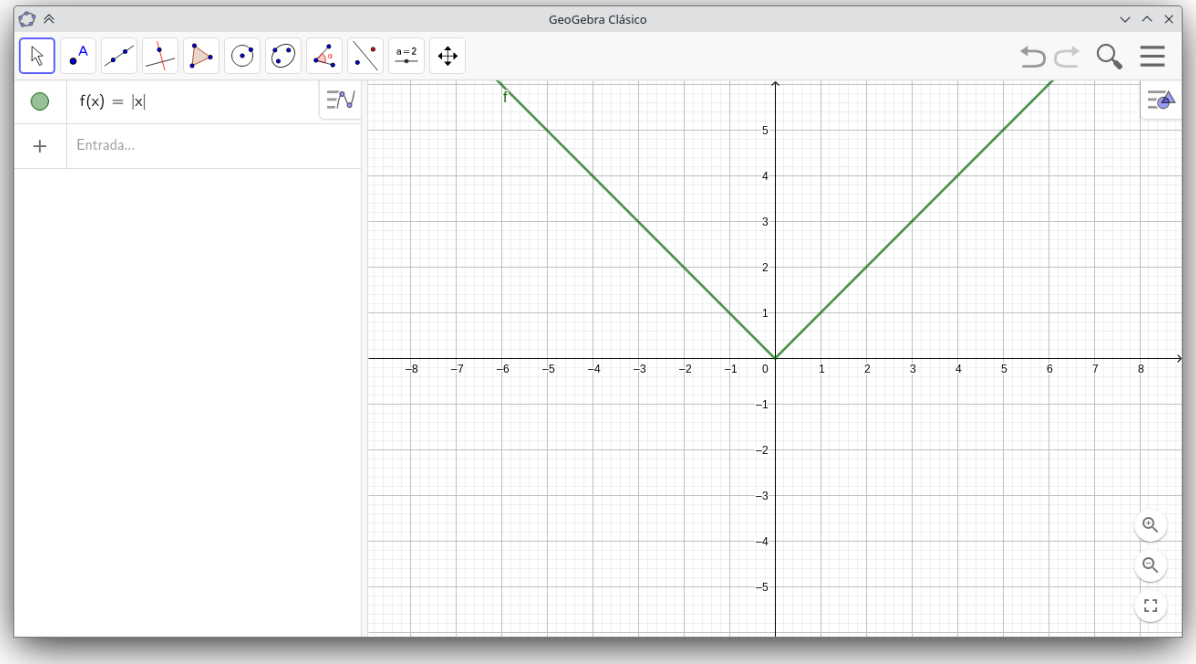


Figura 2.90: Gráfica de la función $f(x) = |x|$

Luego de definida la función el docente podrá trabajar, por ejemplo, las transformaciones de la función tanto desde lo gráfico como desde lo algebraico, por ejemplo $f(x)$=|x-3|.

También se podrá estudiar la composición de funciones, como por ejemplo la función valor absoluto de una función cuadrática:

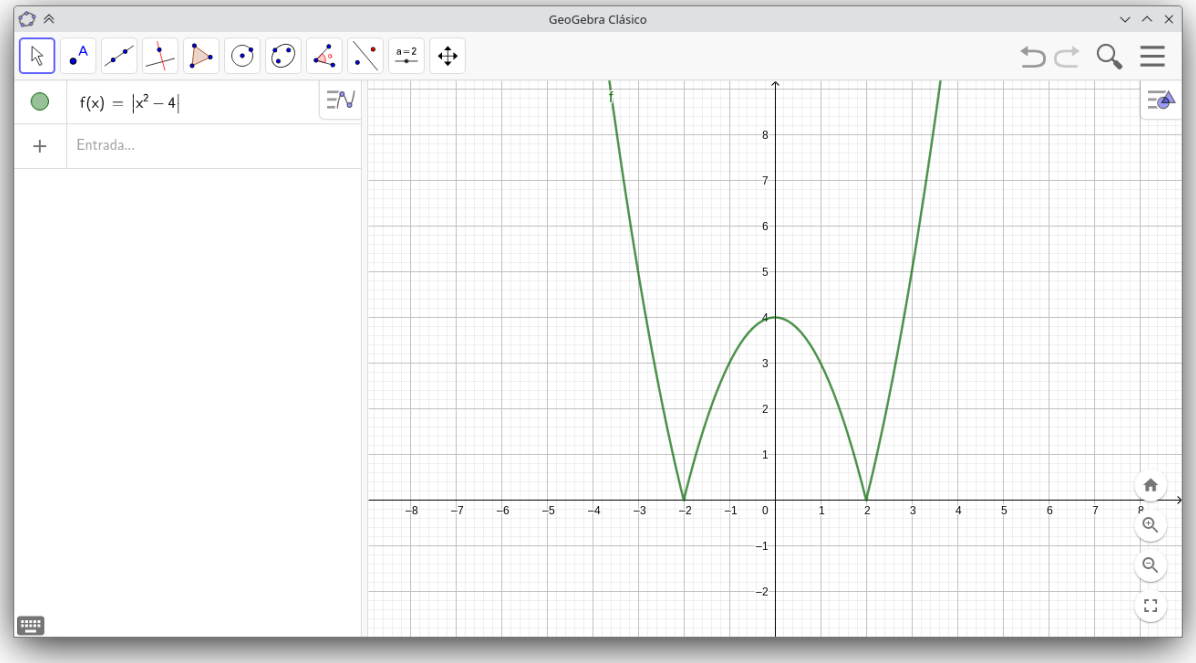


Figura 2.91: La función parece «rebotar» en el eje horizontal.

2.3. Cálculo

2.3.1. Mínimos con derivada primera

Nombre: El problema del cocodrilo.

Resumen: El problema del cocodrilo es un clásico en la literatura del análisis matemático. En él se emplea la derivada primera para encontrar el mínimo de una función de costos.

Objetivo: Aplicar la derivada primera para encontrar el mínimo de una función.

Saberes: Funciones. Derivadas. Distancia en el plano.

Edad: 16 a 18 años.

Preparación Se requiere para este problema que el docente posea un proyector donde poder mostrar al alumnado las distintas situaciones de posición del cocodrilo respecto a la cebra, utilizando en el proceso puntos deslizantes y texto dinámico.

Planteo

Un cocodrilo con mucha hambre ha divisado una cebra al otro lado del río. Como es sabido los cocodrilos son excelentes nadadores y podría cruzar nadando directamente hacia la cebra pero la corriente del río hace que le cueste el *doble* de distancia por el agua que caminando por la orilla.

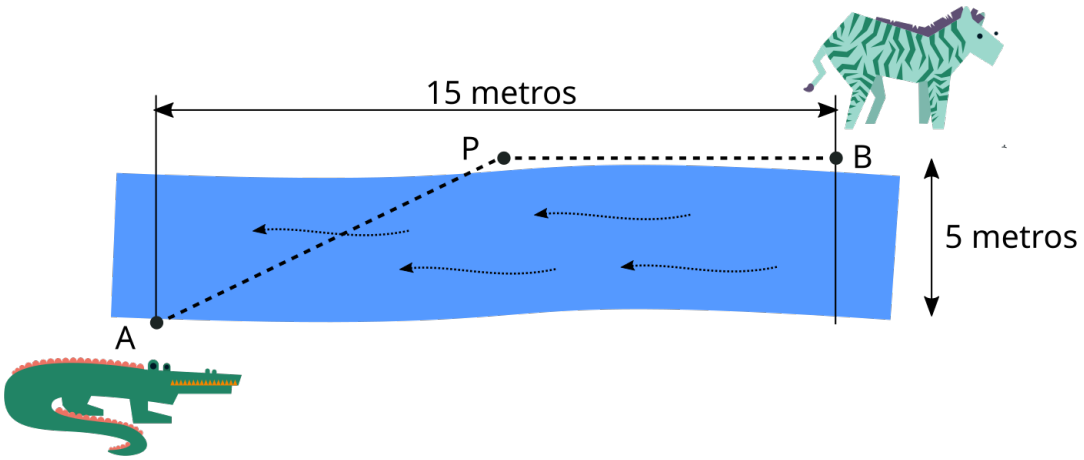


Figura 2.92: El problema del cocodrilo. Imágenes de Freepik

Teniendo en cuenta los datos del problema y considerando la distancia como única medida de costo, responde:

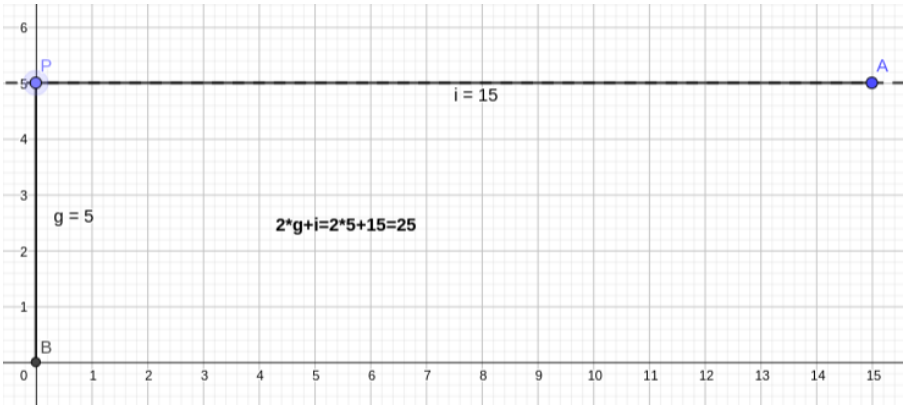
1. ¿Cuál es la distancia calculada que recorrería el cocodrilo si decide nadar en linea recta y luego desplazarse por la orilla?
2. Si decidiera nadar directamente hacia la cebra, ¿Cuál sería la distancia calculada?
3. Si decidiera combinar un poco de nado y otro poco de recorrido por la orilla, pongamos por caso 10 metros antes de alcanzar a la cebra, ¿Cuál es la distancia recorrida?
4. ¿Qué conclusiones podemos obtener de las tres respuestas anteriores?
5. Siendo «x» la distancia horizontal desde «A» hasta el punto «P», ¿cuál es el distancia óptima de «x» de forma que el cocodrilo alcance a la cebra empleando la menor distancia calculada posible?
6. Obtiene una fórmula en función de «x» que exprese la distancia total calculada por el cocodrilo.
7. Calcula y grafica su derivada segunda en *GeoGebra*. ¿Qué relación puedes encontrar al analizar esta función y la búsqueda del punto óptimo «P»?

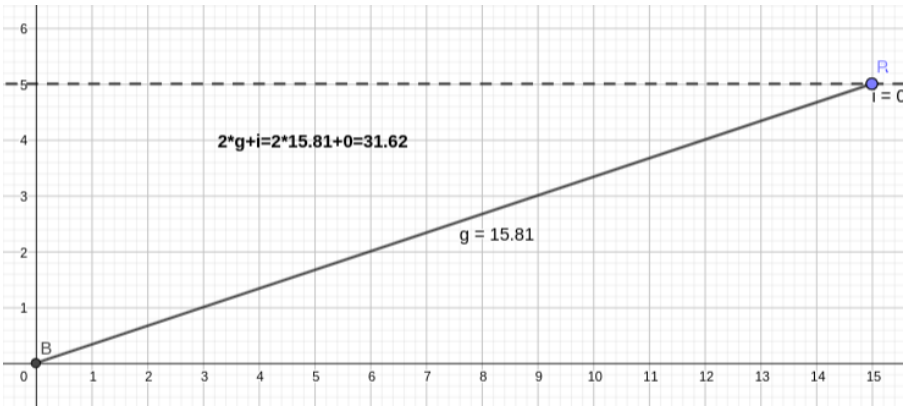
Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El planteo del problema desde la gráfica muestra claramente dos recorridos a realizar por el cocodrilo, uno por el agua y el otro por la orilla del río. El río tiene 5 metros de ancho y la distancia horizontal hasta la cebra es de 15 metros. Además cruzar el río demanda el *doble* de distancia por la fuerte corriente en contra.

2. *Pensar una estrategia*: Las primeras tres preguntas responden a un cálculo directo que involucran graficar las situaciones, que los alumnos podrán medir o calcular. Al momento de calcular las distancias, el docente deberá estar atento para recordarle al alumnado el concepto de distancia en el plano a partir del *Teorema de Pitágoras*. En cualquier caso habrá que sumar dos distancias, el doble de la longitud de $\overline{AP}$ con la distancia $\overline{PB}$.
   Resta pensar qué estrategias podrán tomar los alumnos para resolver las últimas preguntas, que guiados por el docente probablemente se respondan por aproximación, prueba y error.

3. *Ejecutar el plan:* Para responder las primeras tres preguntas se podrán realizar tres gráficas:





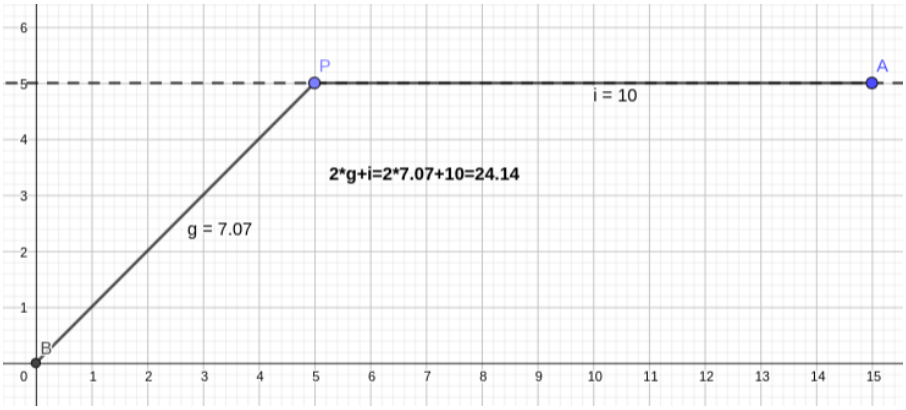


Figura 2.93: Las gráficas responden a las primeras tres preguntas.

La primer gráfica indica que nadar perpendicularmente al eje del río hacia la otra orilla y luego desplazarse por la orilla demanda 25 metros de costo, luego la segunda gráfica muestra que nadar directamente hacia la cebra en linea recta se calcula en 31.62 metros puesto que el río en contra duplica la distancia de 15.81 metros. Por último, la tercer opción donde se hace un tramo nadando y otro por la orilla se calcula en 24.14 metros.
¿Qué conclusiones podemos obtener de las tres respuestas anteriores? Pues que conviene la tercer opción, ya que el costo es menor que las dos primeras opciones.
Esto invita a pensar que podría existir otra ubicación para el punto «P» que mejore el valor de costo, es decir que lo minimice. Aquí es probable que los alumnos intenten cambiar el valor del segmento «i» por otro menor o mayor. Encontrarán valores del segmento «i» entre 12 y 13 que aproximan un mínimo menor a 24 metros.
La siguiente pregunta hace que nos planteemos si existe una única solución a este problema dependiendo de la cantidad de cifras decimales que tomemos en cuenta en los cálculos. Medir ya no es una opción válida para este nivel de detalle.
A partir de aquí el docente tendrá que orientar la clase hacia el descubrimiento de una expresión que sume las dos distancias $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, pero en función de una sola variable. Siendo «P» un punto móvil que se desplaza solo de forma horizontal, y tiene coordenadas $(x;5)$, se pueden expresar las dos distancias en relación a «x». La siguiente gráfica muestra la variable «x»:

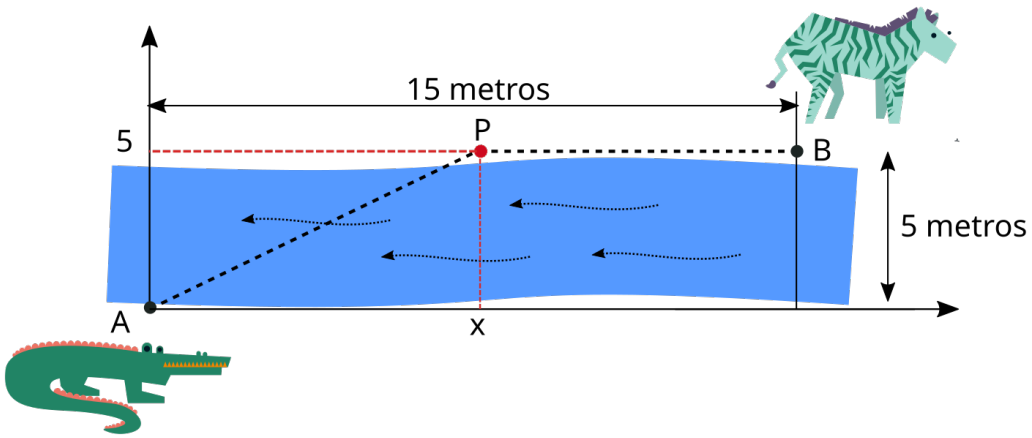


Figura 2.94: «P» es un punto en el plano de coordenadas $(x;5)$.

Los alumnos deberán encaminarse entonces hacia la construcción de la siguiente expresión, que resume el costo de distancias:
$2 \times AP + PB = 2 \times \sqrt{x^2 + 5^2} + (15 - x)$
Esto es así porque se calcula con el *Teorema de Pitágoras* la distancia $\overline{AP}$ que se la multiplica por 2 debido al coste que representa nadar en contra de la corriente del agua, y el segundo término se calcula como la diferencia entre la distancia horizontal fija de 15 metros menos el valor variable de «x».

Si pensamos dicha expresión como una función, podemos graficarla en *GeoGebra* para entender su comportamiento, *dominio* e *imagen*:

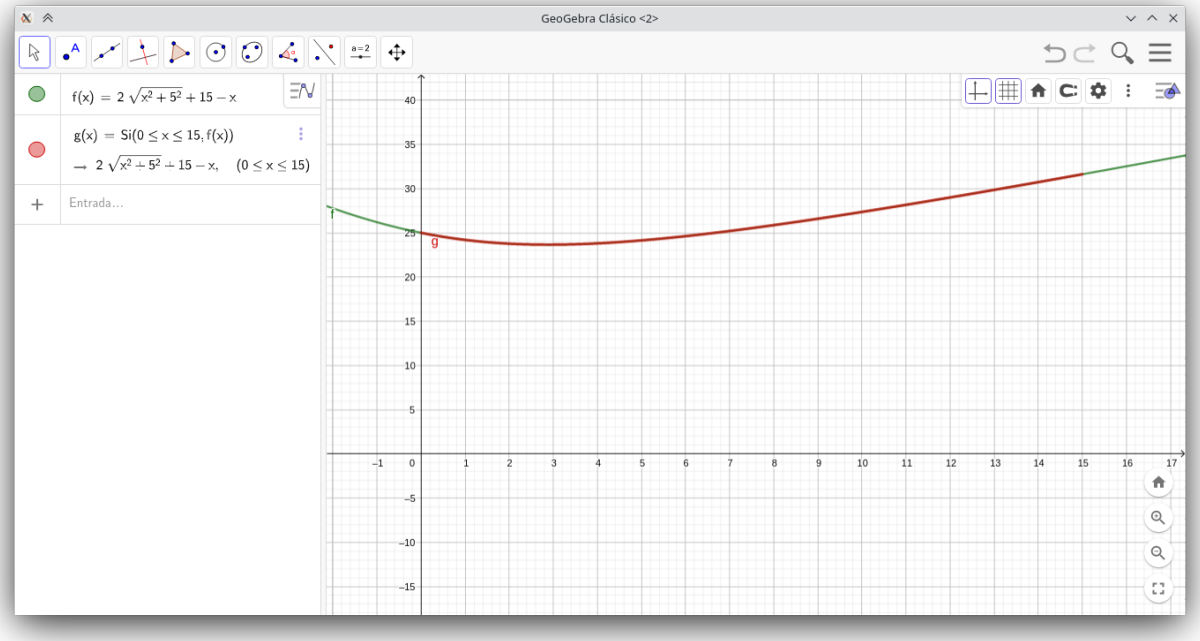


Figura 2.95: En rojo, la función «g» restringe el dominio de «f» (en verde) entre 0 y 15. Se adaptó la vista gráfica a una escala conveniente a la forma de la función en el dominio dado.

Se observa que la gráfica de la función posee una especie de «panza» hacia abajo en las cercanías a los valores de 2 y 3, que es justamente donde se ha experimentado empíricamente el mínimo del problema del cocodrilo.
Será cuestión ahora de resolver la última pregunta y encontrar qué relación existe entre la función «f» y su derivada, sobretodo en las cercanías del intervalo descripto anteriormente.
El cálculo de la derivada podrá hacerse directamente en *GeoGebra* mediante el comando «*Derivada*(f)» o «f'». Los alumnos podrán comparar las dos funciones gráficas y observar que hay alguna coincidencia entre el mínimo de «f» y la raíz de su *función derivada*. También podrán surgir otras observaciones, como el signo de los valores de la *función derivada* antes y después de dicho punto.

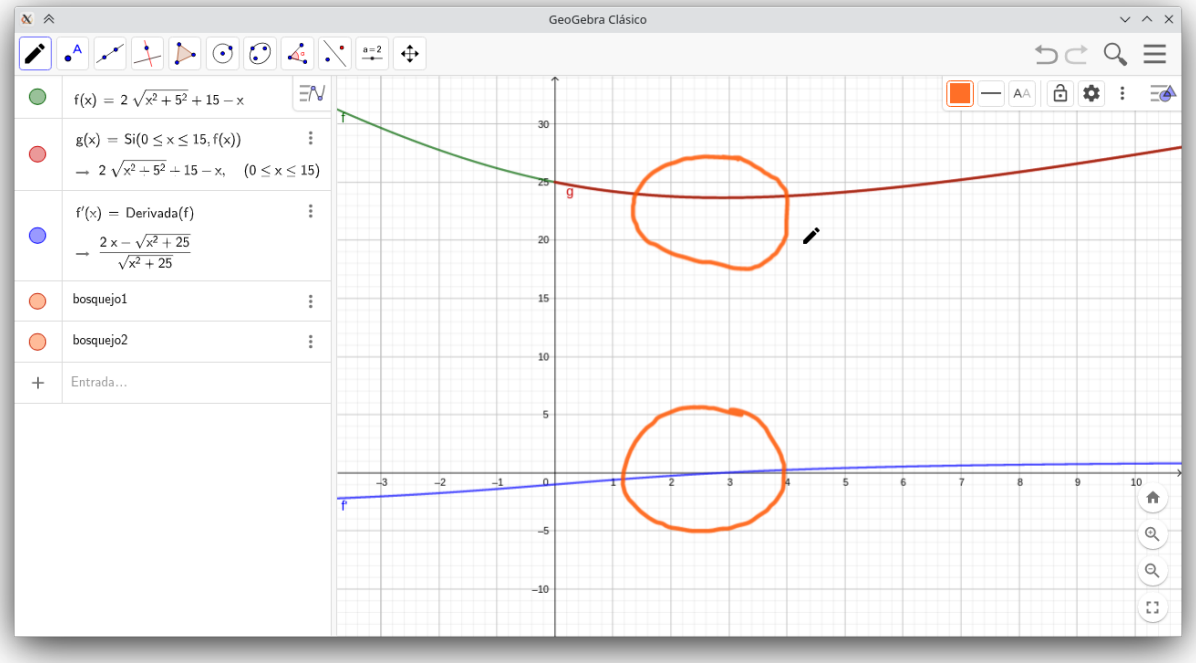


Figura 2.96: El docente deberán orientar a los alumnos a observar y comparar el comportamiento de las dos funciones en las áreas marcadas.

4. *Verificar y repensar la solución.* Si bien las preguntas orientan la resolución hacia el uso de la *derivada*, habrá que pensar si los alumnos diseñan o profundizan alguna otra estrategia de resolución, como puede ser emplear algún método de aproximación para encontrar la solución de hallar el punto «P» con un error lo suficientemente despreciable, como podría ser el cálculo de valores entre 2 y 3 con más de dos decimales, por ejemplo.
   Asimismo resulta en un buen momento para remarcar el valor del signo de «f'» en todo su dominio.

Validación

Para introducirnos al proceso de validación aislaremos el problema concentrándonos en responder de manera precisa la última pregunta: *¿Qué relación puedes encontrar al analizar esta función y la búsqueda del punto óptimo «P»?*

En *GeoGebra* buscaremos el valor exacto de «x» para el punto «P» haciendo la intersección de la *función derivada* «f'» con el eje horizontal:

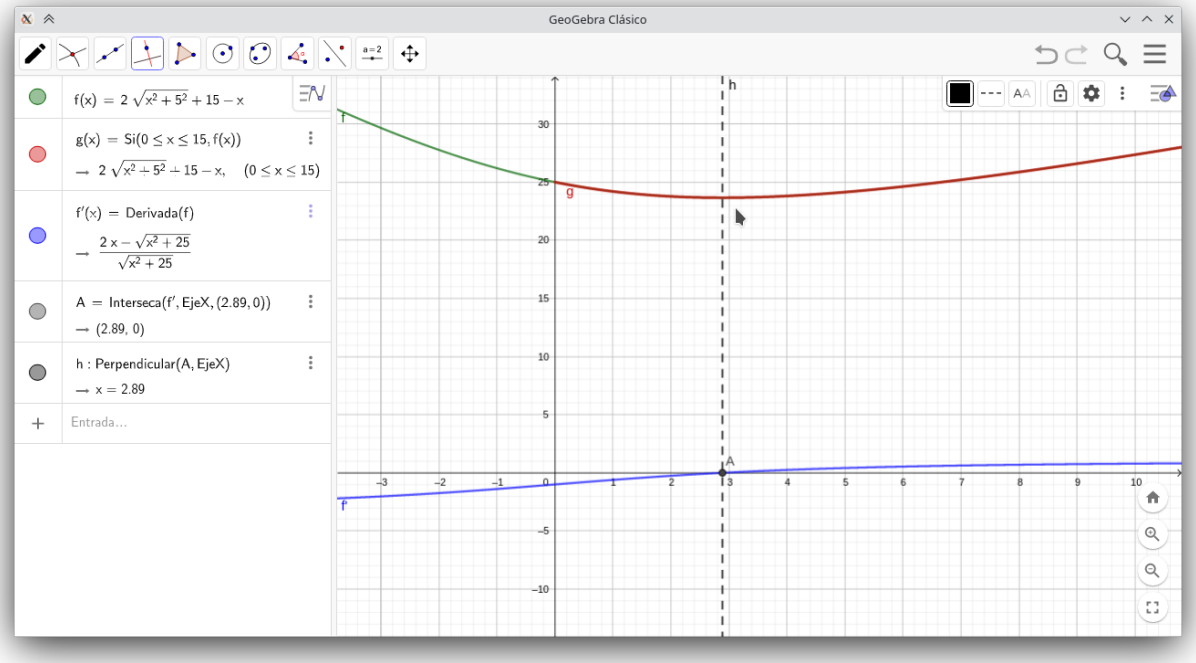


Figura 2.97: Se ha graficado la intersección de «f'» con el eje horizontal y se obtuvo el valor 2.89 como solución. También se graficó una recta vertical punteada (h) para mostrar dónde se encuentra dicho punto en la gráfica de «f»

También se puede encontrar el valor solución resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$. Una vez hallado dicho valor el docente podrá construir la siguiente gráfica, para demostrar la relación entre el valor de la derivada primera de una función en un punto y la pendiente de la recta tangente a la función en el mismo valor. Para armar la gráfica se pueden seguir estos pasos:

1. Agregar un punto sobre «f'» (B)
2. Marcar una recta perpendicular al eje horizontal que pase por dicho punto
3. Calcular la intersección de la recta con la función «f»
4. Agregar la recta tangente a «f» que pasa por el segundo punto (C)
5. Modificar los estilos de los elementos creados de forma que se visualicen a la vez las coordenadas de «B» y la ecuación de la recta tangente a «f»

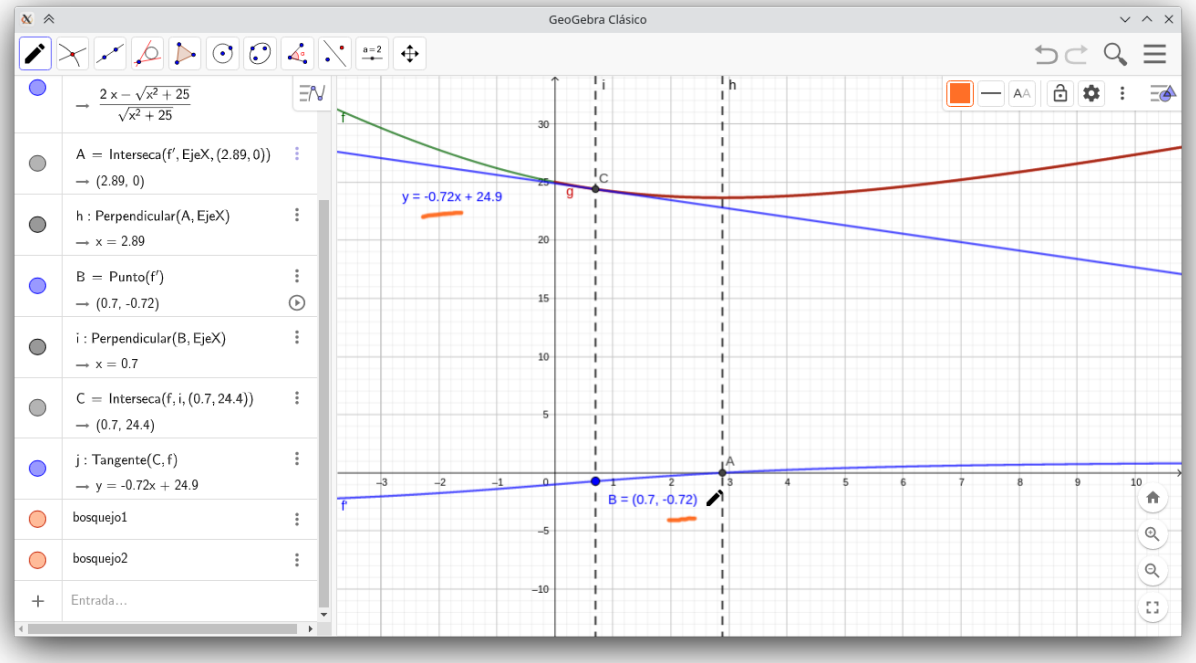


Figura 2.98: Al desplazar el punto «B», móvil, a lo largo de la función derivada «f'» se observará como cambia de ubicación la recta tangente a «f». En la imagen se ha resaltado la coordenada «y» del punto «B» y el valor de la pendiente de la recta.

El docente tendrá que orientar la clase a observar que el valor de la función derivada «f'» en un punto coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente a «f» en dicho punto. Esta coincidencia destaca tres relaciones en particular:

1. El intervalo de negatividad de «f'» coincide con los valores negativos de la pendiente de la recta tangente a «f»,
2. El intervalo de positividad de «f'» coincide con los valores positivos de la pendiente de la recta tangente a «f», y
3. El valor 0 para «f'» responde correlativamente a la pendiente nula de la recta tangente a «f».

Figura 2.99: Ahora si, la solución óptima del problema es el valor de «f» en $x = 2.89$, es decir $f(2.89) = 23.66$ metros de distancia calculada.

Formalización

La institucionalización de este problema refiere entonces a la *interpretación geométrica* de la *derivada* de una función en un punto, que es precisamente la pendiente de la recta tangente en el mismo. Por lo visto anteriormente se puede inferir que si la gráfica de la función «f» presenta un *mínimo* en cierto intervalo, entonces ese *mínimo* tiene pendiente igual a 0.

Asimismo habrá que hacer notar que los intervalos de *positividad* y *negatividad* de la función derivada corresponden, en principio, al crecimiento y decrecimientos de la función original, respectivamente.

Se sugiere también proponer gráficas de funciones con *concavidad* negativa donde se pueda concluir con un análisis similar que el valor nulo de la *derivada* primera también puede corresponder a un *máximo*.

El problema también abre la puerta al estudio de la *derivada* segunda, de forma que se pueda estudiar la *concavidad* positiva y negativa de la función. Es decir, para distinguir si este punto corresponde a un máximo o un mínimo, se puede recurrir al *Criterio de la Segunda Derivada*. Si la derivada segunda, $f''(x)$, evaluada en el punto crítico es positiva, se confirma la concavidad positiva, y por lo tanto, la existencia de un mínimo en ese punto.

2.3.2. Integrales

Nombre: El mural de la escuela.

Resumen: A partir de un problema de diseño y pintura de un mural escolar, se busca que el alumnado necesite calcular el área bajo una curva irregular, sirviendo como disparador para los conceptos asociados a las integrales.

Objetivo: Introducir la noción de integral definida como el límite de la suma de las áreas de rectángulos (o figuras conocidas) que aproximan el área bajo una curva, es decir como Sumas de Riemann. Luego también será objetivo poder definir el concepto de primitiva o antiderivada y la Regla de Barrrow.

Saberes: Funciones trigonométricas, área de rectángulos y triángulos, concepto de límite, derivadas.

Edad: 16 a 18 años.

Preparación En cálculo, salvo que se indique lo contrario, los argumentos de las funciones trigonométricas son siempre en radianes, por lo tanto el docente deberá tenerlo en cuenta a la hora de configurar tanto las calculadoras de mano como *GeoGebra.* En las calculadoras generalmente se observa la letra R en alguna parte de la pantalla, y en *GeoGebra* la configuración se encuentra en Propiedades→Álgebra→Unidad angular→Radianes.
Por otra parte, debido a que la intención didáctica del problema es llegar al concepto de las las *Sumas de Riemann*, el concepto de *primitiva* y luego a la *integral definida*, será necesario que el docente sea metódico en cada etapa, sobre todo en la formalización.

Planteo

El Centro de Estudiantes ha decidido pintar un mural en una de las paredes del patio, que mide 6 metros de largo por 3 metros de alto. Para proporcionarle un diseño dinámico, proponen que la pared se divida con una curva, verde abajo y naranja arriba, representando el logotipo de la escuela con sus colores. El docente de matemática, que justo pasaba por allí, les propone que lo dividan con una curva sinusoidal (donde x representa el largo de la pared en metros y $f(x)$ su altura):

$$f(x) = sin(x) + 1.5$$

El Centro necesita saber con exactitud la superficie de cada color para comprar las latas de pintura necesarias, ya que el presupuesto es acotado. ¿Cómo podrías calcular el área de la sección inferior (entre el piso y la curva) y de la sección superior?

Figura 2.100: Imagen ilustrativa del problema. Generada por Gemini IA y modificada por el autor.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El docente trabajará una primera etapa de descubrimiento con todo el grupo de alumnos, para que con sus palabras puedan describir cuál es la situación planteada. Se espera que los alumnos lleguen a explicar que: el muro a pintar tiene $6m$ de ancho y $3m$ de altura, y se lo debe pintar con dos colores: naranja y verde. El diseño de la pintura debe seguir una función específica, que se observa

en la ilustración que acompaña al problema: $f(x) = sin(x) + 1.5$. El problema radica en conocer qué superficie ocupará cada color, para luego comprar la pintura necesaria.
Se sugerirá que los alumnos grafiquen la pared y la función en *GeoGebra* para entender mejor el panorama:

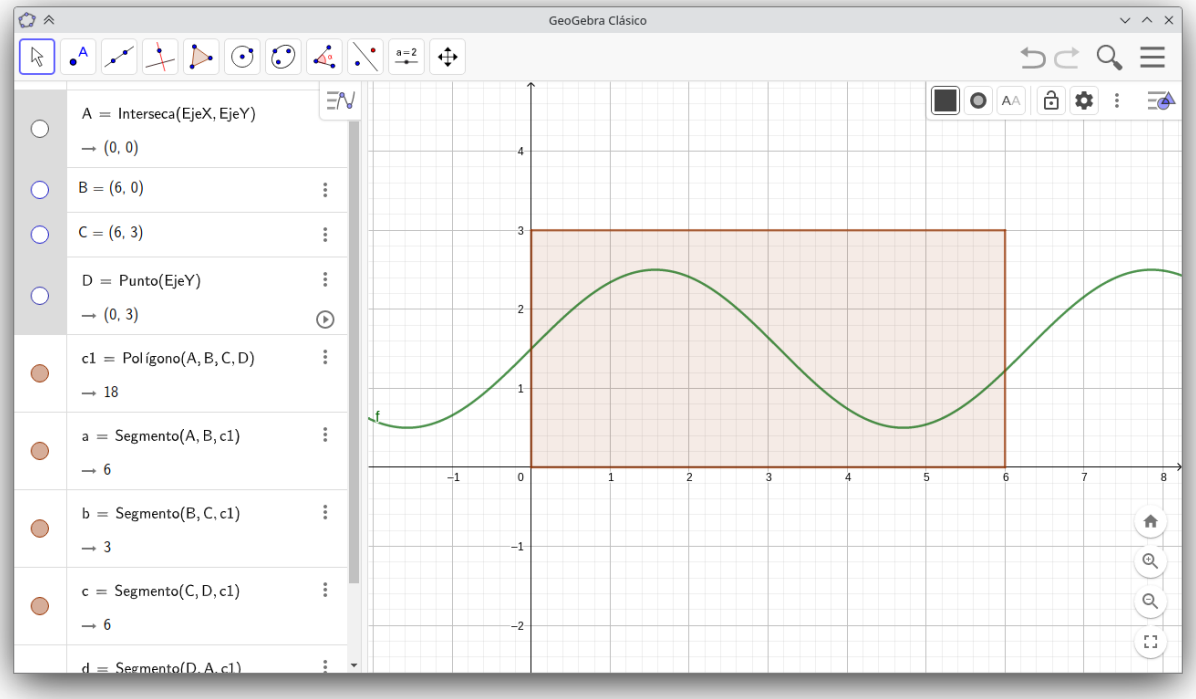


Figura 2.101: Se graficó la curva de la función sinusoidal y el rectángulo que hace las veces de «pared». Unidades en metros.

2. *Pensar una estrategia*: Una vez aclarados los objetivos del problema el docente propondrá preguntas orientadoras que permitirán guiar a los alumnos hacia el objetivo didáctico: ¿Si se pudiera pintar la pared de un solo color, qué superficie tendría que pintar?, ¿Cómo piensan que se reparte, en proporción la cantidad de pintura naranja y verde?, ¿Cómo creen que se pude calcular cada superficie? ¿Pueden simplificar el problema de forma que sea relativamente fácil de calcular?
La primera pregunta es de respuesta inmediata, es decir $3m \times 6m = 18m^2$, lo cual es el máximo de pintura a comprar entre los dos colores. Luego, algunos alumnos opinarán que cada color lleva la misma cantidad, a lo cual el docente replicará: ¿cómo podemos estar seguros?, y ante la falta de argumento se deberá pensar en un método que permita calcular cada área.
El docente les propondrá entonces, como estrategia, utilizar *GeoGebra* para determinar áreas aproximadas que solapen la forma de la figura inferior y superior, y de esa manera resolver el problema.

3. *Ejecutar el plan:* Los alumnos marcarán algunos puntos sobre las figuras del mural. Una forma posible podrá ser la siguiente:

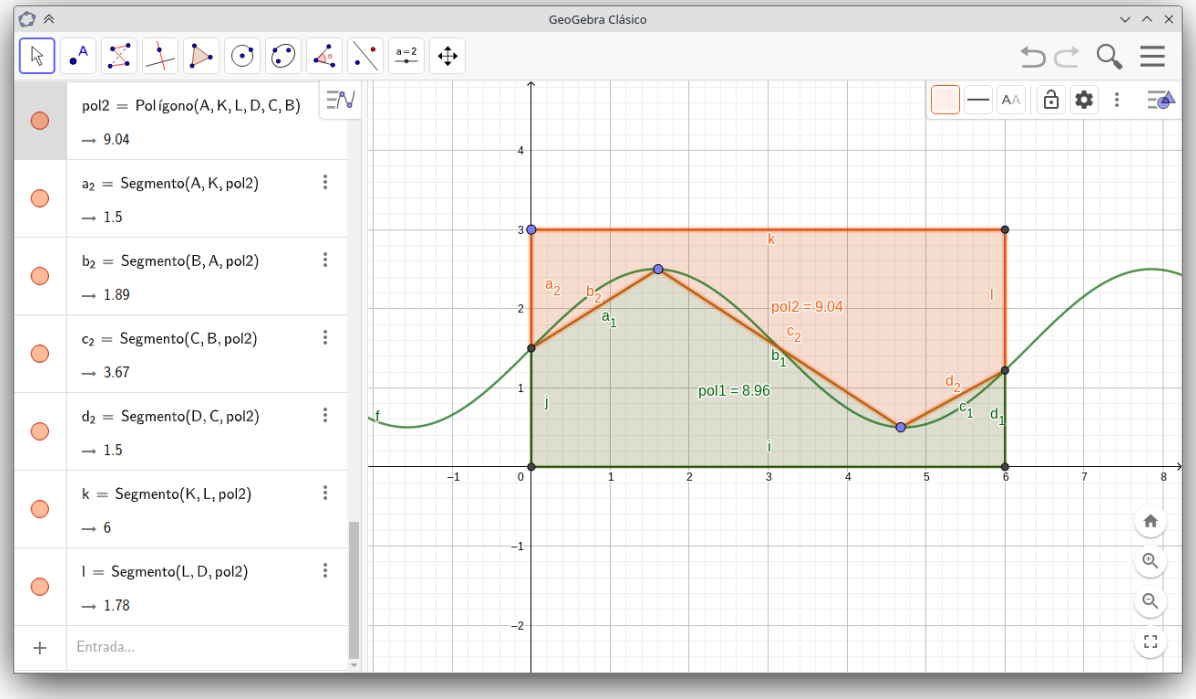


Figura 2.102: El alumno optó por graficar hexágonos cóncavos para la parte inferior y superior, aproximando las áreas originales verde y naranja.

En este caso el área verde es $8.96m^2$ y el área color naranja $9.04m^2$, las cuales son diferentes pero muy cercanas entre si. Su suma es $18m^2$.
El docente propondrá ahora una aproximación más detallada:

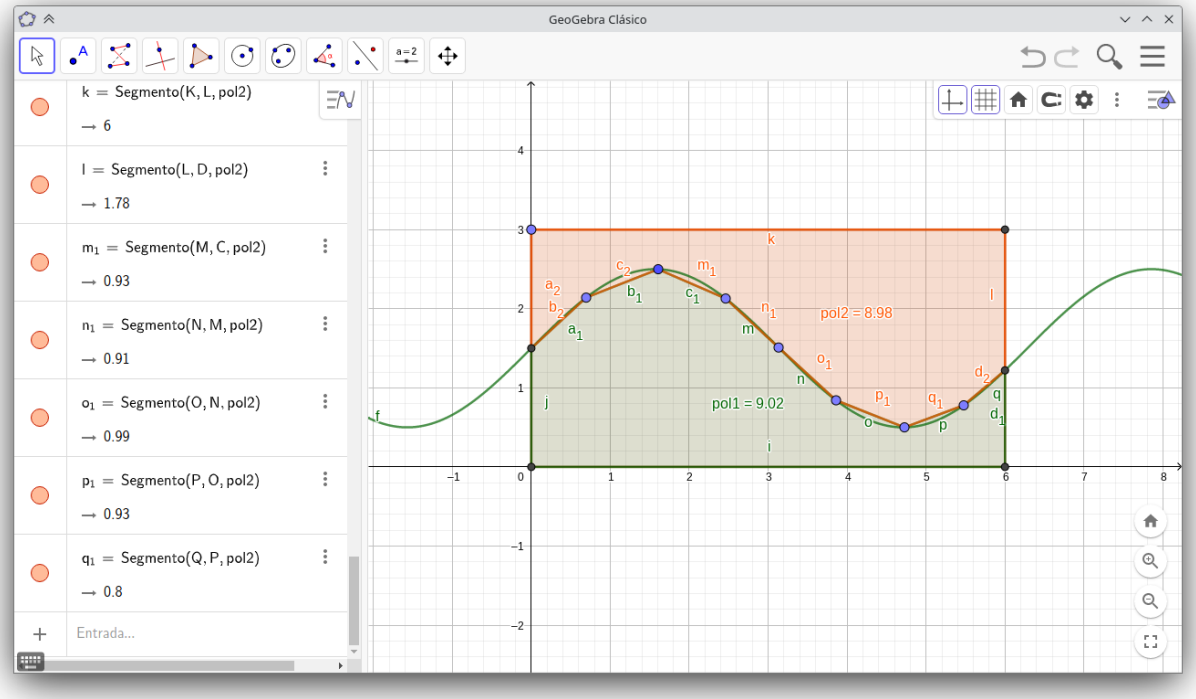


Figura 2.103: Los polígonos ahora tienen más lados y se solapan con mejor sobre la curva.

Ahora el polígono verde tiene $9.02m^2$ y el naranja $8.98m^2$, sumando la totalidad del rectángulo $18m^2$.

4. *Verificar y repensar la solución.* Los alumnos podrán ir comprobando que los valores son similares pero no siempre son iguales tanto para las partes verdes y naranjas. Lo que si queda claro es que los valores rondan los $9m^2$, para cada color.
   En cualquier caso, el docente deberá dejar expuesto que lo trabajado logra resolver el problema por aproximación, pero que de ninguna manera logra determinar las áreas exactas a pintar de cada color. Esta inquietud será el puntapié para la siguiente etapa, de validación.

Validación

En esta etapa el docente no solo buscará validar deforma contundente el trabajo realizado por los alumnos, sino que buscará la manera de introducir el cálculo infinitesimal en el entramado del problema, es decir, la sumatoria de los rectángulos que cubren el área bajo la curva cuando los mismos son cada vez más «angostos» y, en consecuencia, más cuantiosos.

Propondrá a los alumno seguir con la estrategia de simplificar la curva en polígonos que puedan ser calculados de forma sencilla, y que sirva para aproximar el área real. Pero en lugar de armar un polígono que siga la curva dividirá el área bajo la curva en rectángulos de igual base con altura en el punto medio del mismo. Es decir, dividirá los $6m$ de longitud en dos rectángulos de $3m$ cuyos puntos medios de las bases se encuentran en las abscisas $x = 1.5$ y $x = 4.5$, con alturas (imágenes de las funciones en dichos puntos) en las ordenadas $y = 2.5$ e $y = 0.52$. La figura muestra esta situación:

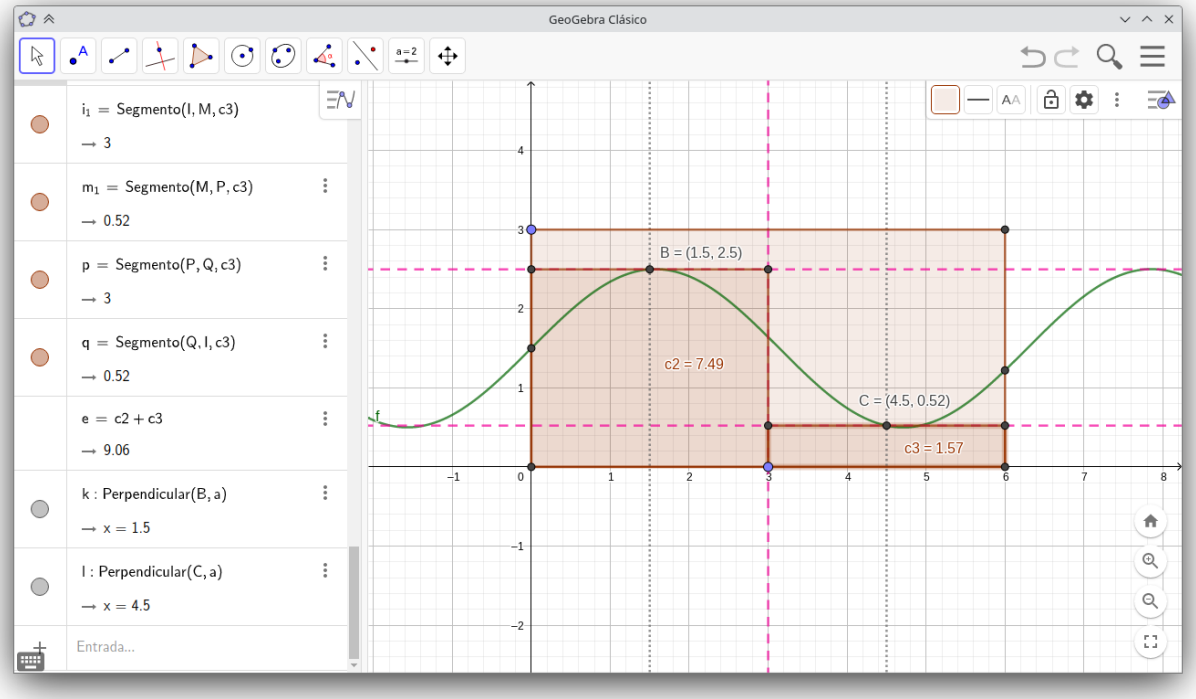


Figura 2.104: Los rectángulos $c2$ y $c3$, de base igual a $3m$ son simplificaciones un poco grotescas de las áreas bajo la curva sinusoidal, pero que servirán para establecer la idea de que se puede dividir el ancho total en muchos rectángulos.

Las sumas de estos dos rectangulos es aproximadamente $9.06m^2$, lo cual se acerca bastante al número calculado en la etapa de Resolución. La parte superior se calculará por diferencia respecto a los $18m^2$ de área que tiene el rectángulo mayor.

Así, por ejemplo, se puede avanzar en esta idea de dividir el área en rectángulos de igual base. Por ejemplo, en 3 partes:

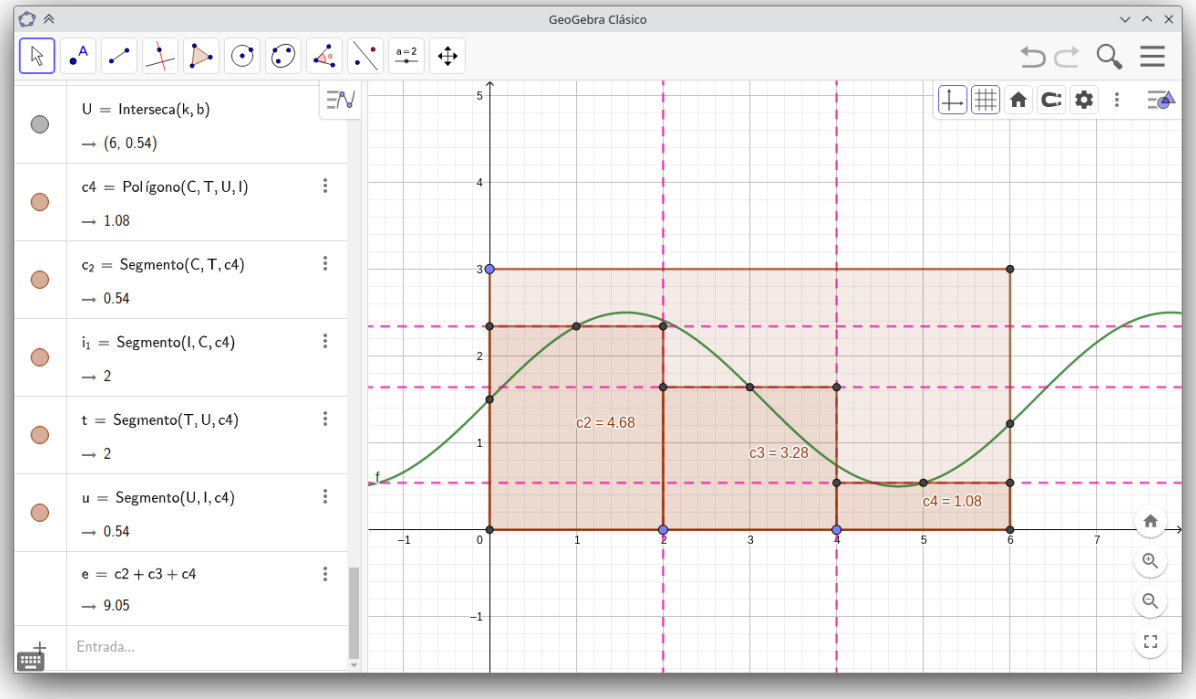


Figura 2.105: Los rectángulos $c2$, $c3$ y $c4$ suman aproximadamente $9.05m^2$ de superficie.

Y si se lo divide en más partes pareciera que, desde lo visual, el margen de error disminuye:

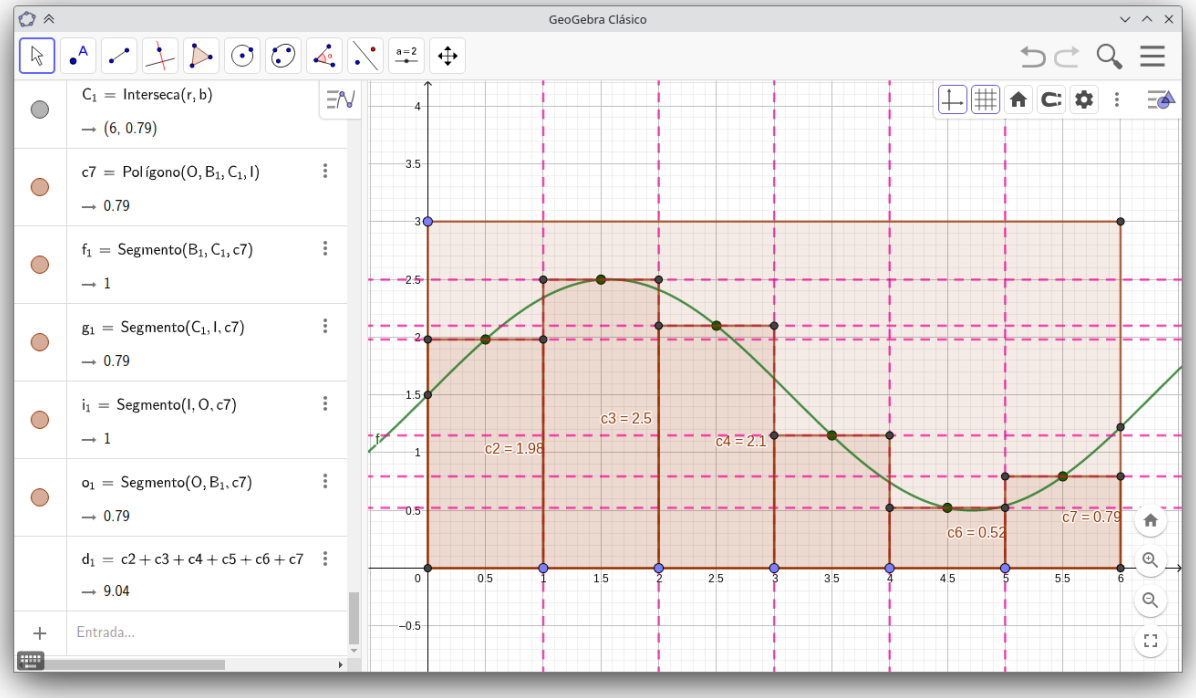


Figura 2.106: Con 6 divisiones el valor calculado es $9.04m^2$.

El docente indagará a los alumnos respecto a los resultados obtenidos, buscando que los alumnos compren-

dan que al dividir los $6m$ de la base en más divisiones se obtendrán más rectángulos, y esto significa mayor aproximación del área real bajo la curva. Como no es tan sencillo el procedimiento de dividir la base y sumar los rectángulos manualmente utilizará la herramienta *SumaRectángulos()*. Este comando crea y suma las áreas de los rectángulos bajo la función dada, desde un inicio a un fin utilizando un coeficiente entre 0 y 1 como marca para calcular la altura del rectángulo. Por ejemplo, $SumaRectángulos(f, 0, 6, 6, 0.5)$ indica que utilizará la función f entre el valor inicial 0 y el valor final 6, dividiendo entre 6 el intervalo dado, y calculará la altura del rectángulo según dicha función en su punto medio de base (0.5):

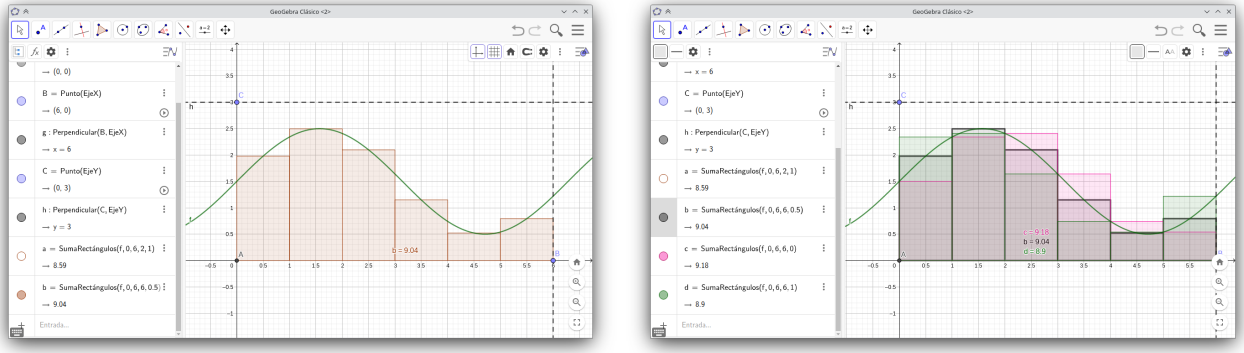


Figura 2.107: *Izq.*: El comando divide el intervalo en 6 partes y dibuja los rectángulos con altura en el punto medio de su base. El área es igual a la calculada anteriormente.
Der.: Se aplicó el mismo comando pero con rectángulos de altura en posición 0 (inicio), 0.5 (mitad) y 1 (fin) de las bases.

El docente les hará notar las diferencias en las sumas, donde los valores rondan el número 9. Aquí podrá indagar al alumnado respecto a cuál es el valor que más se aproxima a lo calculado en la etapa de resolución.

Ahora podrán calcular más divisiones con un solo comando, y de esta forma mostrar cómo se aproxima el área de la suma de rectángulos al área real bajo la curva. Para que esto sea dinámico es mejor crear un deslizador que permita tomar valores de 1 a 50, para así luego poder introducir la notación de límite para valores infinitésimos de ancho de base[18]:

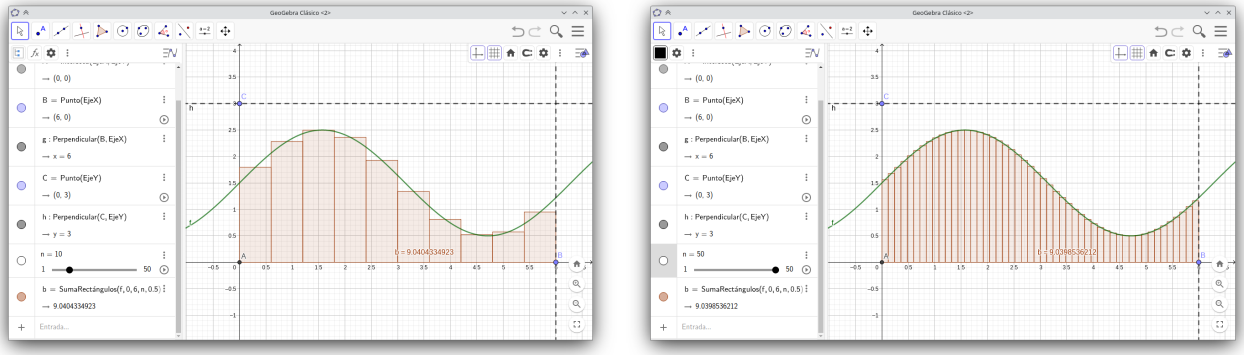


Figura 2.108: *Izq.*: Con 10 divisiones se calcula un valor de $9.0404334923...m^2$
Der.: Con 50 divisiones se llega a $9.0398536212...m^2$

Existe también un comando en GeoGebra que utiliza trapecios en lugar de rectángulos, se llama *SumaTrapezoidal()*, y utilizando el mismo deslizador se tiene el siguiente ejemplo:

[18]Notar que para que esta comparación tenga sentido es necesario ampliar la cantidad de valores decimales que muestra *GeoGebra*, que por defecto son solamente 2. Esto se configura en Propiedades→Redondeo.

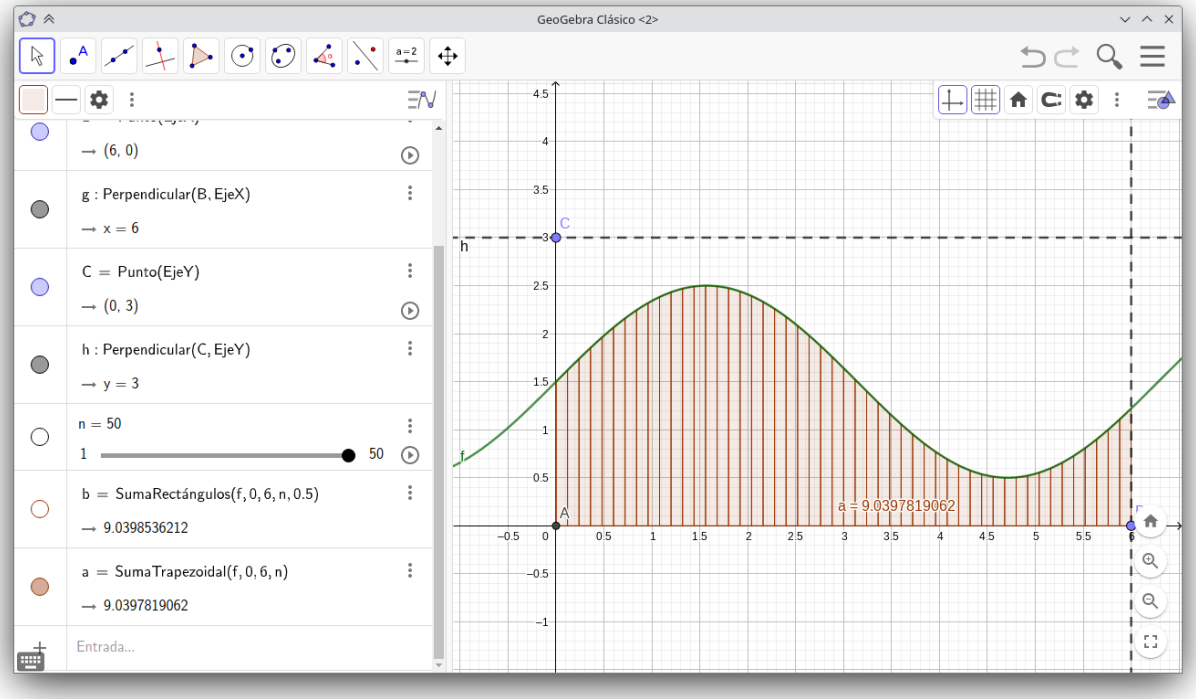


Figura 2.109: La suma trapezoidal es prácticamente coincidente con la rectangular.

Estos valores permiten entender que el valor sigue siendo aproximado, sin embargo el concepto de dividir el intervalo $[0, 6]$ en cada vez más rectángulos implica mejorar el resultado. Se podría decir, a esta altura que a efectos prácticos ya no es necesario mayor precisión puesto que el redondeo da $9.04m^2$ para la pintura verde. Si restamos este valor al área del rectángulo que representa la pared obtenemos $18 - 9.04 = 8.96m^2$ para la pintura naranja.

El maestro podrá indagar en el alumnado con el objetivo de utilizar las nociones de límite que ellos ya conocen: ¿qué sucede con la gráfica cuando aumentamos la cantidad de rectángulos bajo la curva?, ¿cómo son los valores de las bases de esos rectángulos a medida que aumentamos la cantidad de rectángulos?, ¿cómo son las áreas de estos rectángulos cuando eso sucede?, ¿qué sucederá con la suma de todos esos rectángulos?, ¿qué tan diminuto puede ser el valor de ancho de base?, ¿influye en algo que la altura se calcule en el medio de la base o en alguno de sus extremos?.

El debate se abrirá con estas preguntas, rescatando ideas y conceptos aprendidos, buscando que los alumnos deduzcan que la precisión aumentará con mayor cantidad de rectángulos o trapecios. Luego el docente utilizará el concepto de límite para formalizar la situación. Si $S(n)$ es la suma de los rectángulos y n es la cantidad de divisiones del intervalo $[0, 6]$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} S(n)$$

Para expresarlo de otra forma pensemos en que $S(n)$ es la sumatoria de las áreas de los rectángulos de base Δx, i es la posición ordinal del rectángulo, $x_i$el valor de posición absoluta del intervalo en el lado derecho, y la altura es $f(x_i)$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} = f(x_i) \cdot \Delta x$$

La etapa de validación así termina, dejando esta noción como escalón inicial a lo que luego será la construcción de los conceptos de primitiva o antiderivada y por último el de integral definida.

Formalización

En matemática, la *Suma de Riemann* es un tipo de aproximación del valor de un área bajo una curva mediante una suma finita. Se llama así en honor al matemático alemán del siglo XIX, Bernhard Riemann.

La suma se calcula dividiendo la región en formas (generalmente rectángulos o trapezoides que juntas forman una región que es similar a la región que se está midiendo, luego calculando el área para cada una de estas formas y, finalmente, agregando todas estas pequeñas áreas juntas. Este enfoque se puede usar para encontrar una aproximación numérica para una integral definida incluso si el teorema fundamental del cálculo no facilita encontrar una solución de forma cerrada.

Como se ha visto existen varias formas de diseñar los polígonos para el cálculo aproximada del área. Definiremos dos que son muy importantes para el concepto que queremos elaborar a continuación: aproximación del área por exceso y por defecto.

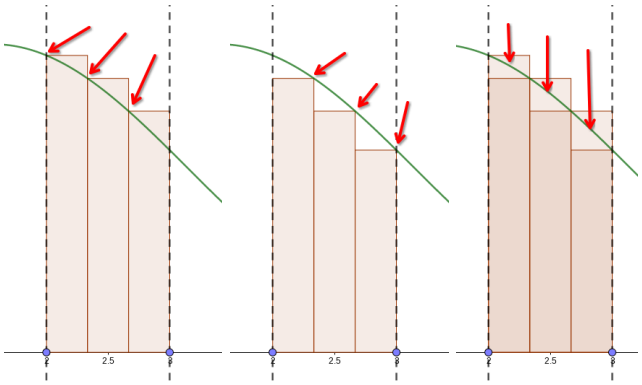


Figura 2.110: *Izq.*: Aproximación del área por exceso, en *GeoGebra* se consigue con el comando *SumaSuperior()*. Los rectángulos tienen la altura de la función en el punto máximo del subintervalo.
Med.: Aproximación del área por defecto, que se logra con *SumaInferior()*. En este caso las alturas toman el valor mínimo del subintervalo.
Der.: Diferencia entre ambas aproximaciones. A mayor cantidad de divisiones, menor será la diferencia entre ambas.

El concepto que se extrae de aquí es similar al que validamos anteriormente con las *Sumas de Riemann*: que dada la condición de continuidad en el intervalo y positividad entre ambos extremos, entonces al hacer infinitas divisiones de rectángulos se logra encontrar el área bajo la curva en dicha porción de recta. O, lo que es lo mismo, que el área buscada es el límite de la convergencia por exceso y por defecto cuando se hace tender a *0* el ancho de la base de esos rectángulos. En matemática anotamos eso de esta manera:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Donde el símbolo $\int$ se lee *«integral»* y proviene de la palabra *«suma»*, donde precisamente significa que se suman infinitas áreas de rectángulos cuyas bases son infinitésimos «dx» y alturas «$f(x)$». La notación $f(x)dx$ representa, precisamente, esta multiplicación:

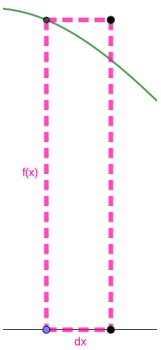


Figura 2.111: Si multiplicamos la altura $f(x)$ con la base dx obtenemos el área del rectángulo.

Por último, en la notación se observa un valor a y otro b, éstos son los *límites de integración*, es decir «desde dónde hasta dónde» queremos calcular el área bajo la curva:

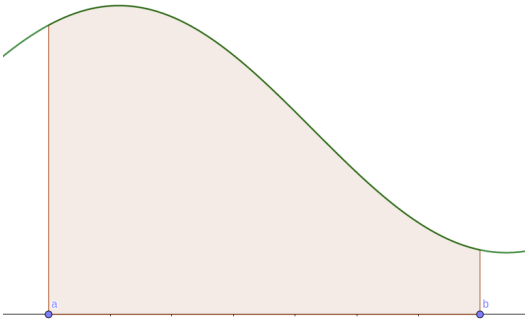


Figura 2.112: Los valores a y b en conjunto con la curva y el eje de las abscisas definen el área de integración,

La tarea de encontrar el área de esta región parece una operación imposible, ¿cómo hacemos para hallar el área de infinitos rectángulos de base infinitesimal? Para resolver ésto definiremos una función auxiliar que nos lleve a encontrar ese área:

Sea $A(t) = \int_a^t f(x)dx$.[19].

Y hallemos también su función derivada por definición[20]:

$A'(t) = \underset{t\to t_0}{Lím}\frac{A(t)-A(t_0)}{t-t_0}$.

Vamos a entender ahora qué significado geométrico tiene este límite[21]. Sabemos que la expresión $A(t)$ significa calcular el área entre t y a bajo la función f y el eje x, y análogamente la expresión $A(t_0)$ es el área entre t_0 y a bajo las mismas condiciones, por lo tanto $A(t) - A(t_0)$ implica calcular el área entre t y t_0 por diferencia entre áreas.

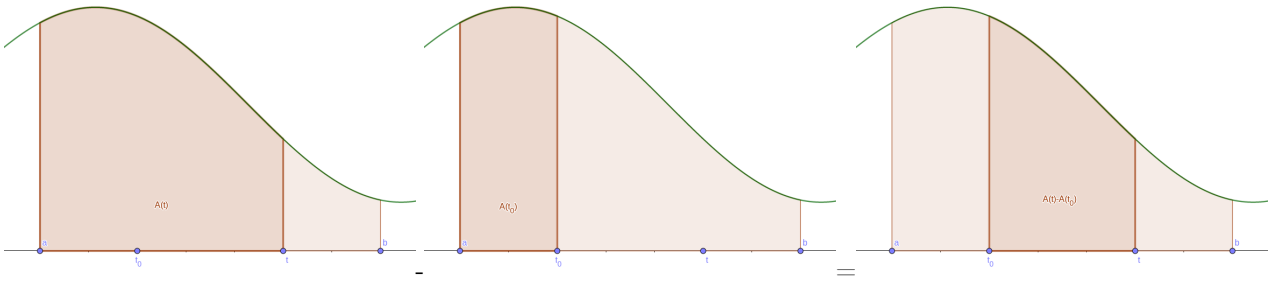


Figura 2.113: La diferencia o resta entre el área $A(t)$ de la figura izquierda con el área $A(t_0)$ de la figura central produce el área de la región $A(t) - A(t_0)$ que se observa en la imagen de la derecha.

Entendamos ahora qué significado geométrico tiene la región resultante:

[19] Una función continua en $[a, b]$ y positiva en (a, b) con $a \leq t \leq b$.

[20] Utilizaremos en esta ocasión la notación que deriva de la pendiente de la secante $f'(a) = \underset{x\to a}{Lím}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (tal como se define en Rabuffetti, H. T. (1994), Introducción al análisis matemático: Cálculo 1, Ed. El Ateneo, Cap. 6. Pág. 194) en lugar de la versión más habitual $f'(a) = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

[21] Habrá que calcular los límites laterales, siendo ambos procedimientos muy similares. Aquí solo lo haremos por derecha.

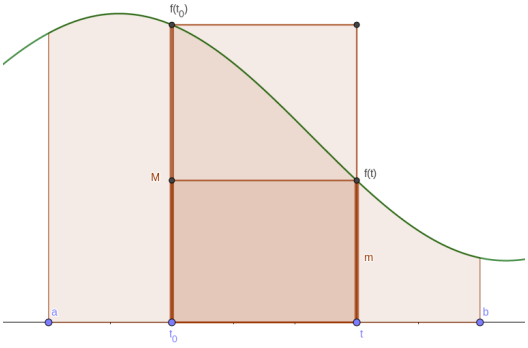


Figura 2.114: La región $A(t) - A(t_0)$ se encuentra de alguna manera acotada entre un rectángulo «máximo» y otro «mínimo».

Observamos ahora los dos rectángulos, uno de altura $f(t_0) = M$ y otro de altura $f(t) = m$, que responden a los valores máximos y mínimos en el intervalo $[t_0, t]$, respectivamente[22]. El primero (de altura M) es claramente mayor en área que la región bajo la curva (verde) en el intervalo $[t, t_0]$, y el segundo rectángulo (de altura m) es inferior a ésta. Por lo tanto sirven como cotas para la expresión $A(t) - A(t_0)$, es decir que podemos ordenar las áreas en bajo esta inecuación:

$$m \cdot (t - t_0) \leq A(t) - A(t_0) \leq M \cdot (t - t_0)$$

Si dividimos toda la expresión por $(t - t_0)$ nos queda[23]:

$$\frac{m \cdot (t - t_0)}{(t - t_0)} \leq \frac{A(t) - A(t_0)}{(t - t_0)} \leq \frac{M \cdot (t - t_0}{(t - t_0)})$$

$$m \leq \frac{A(t) - A(t_0)}{(t - t_0)} \leq M$$

Y si aplicamos el límite[24] cuando $t \to t_0$ resulta que tanto los valores m como M tienden al valor $f(t_0)$, y por el *Teorema del Sándwich*[25] tenemos que la expresión central también tiende a $f(t_0)$. Por lo tanto:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0} = f(t_0)$$

Como este límite era la derivada de la función $A(t)$ en t_0, tenemos que para todo valor de t_0 entre a y b:

$$A'(t_0) = f(t_0)$$

Entonces, con este procedimiento hemos demostrado finalmente que $A'(t) = f(t)$ para todo $a \leq t \leq b$. Y como $A'(t)$ es una derivada de $A(t)$, entonces esta última es una *«antiderivada» o «primitiva»* de $f(t)$, es decir la *inversa de la derivada.*

A esto se lo conoce como *«Teorema fundamental del cálculo»*:

> Si $A(t)$, con $a \leq t \leq b$, es la función que permite calcular el área de la región limitada por el gráfico de la función $f(x)$ (continua en todo valor del intervalo $[a, b]$, y positiva en (a, b)), el eje x y los valores a y t, entonces, $A'(t) = f(t)$. Decimos entonces que la función área $A(t)$ es una *primitiva* de $f(t)$.

¿Para qué nos sirve saber esto? Pues, para encontrar el área correspondiente a una región del plano delimitado según las condiciones dadas: debemos hallar una primitiva de $f(x)$.

Pero hay que hacer una salvedad, la *antiderivada* o *primitiva* de una función no es única. Por ejemplo las siguientes funciones tienen la misma derivada:

$f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = 2x + 3$, ambas tienen derivadas iguales $f'(x) = g'(x) = 2$.

[22] Aquí también coinciden en que son rectángulos por extremo izquierdo y derecho.
[23] Que nunca es 0 porque siempre $t > t_0$ por definición,
[24] Como dijimos antes, por derecha y por izquierda.
[25] En cálculo, el teorema es usado en la determinación del límite de una función, y enuncia que si dos funciones tienden al mismo límite en un punto, cualquier otra función que pueda ser acotada entre las dos anteriores tendrá el mismo límite en el mismo.

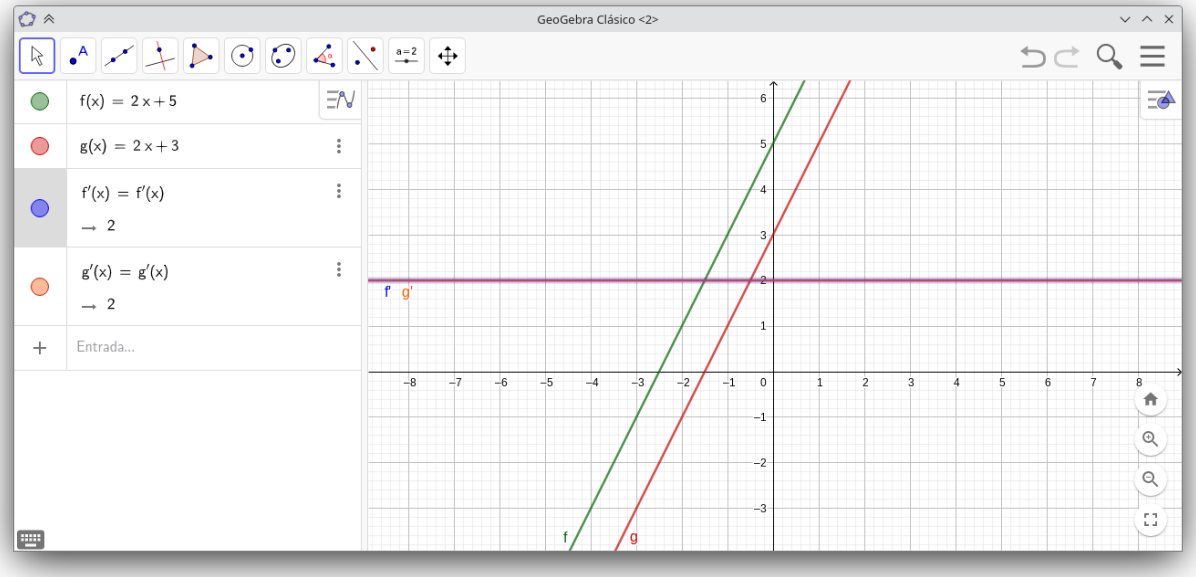


Figura 2.115: En la gráfica se observa que las derivadas de dos funciones afines (verde y roja) producen la misma gráfica constante (azul y naranja).

A modo de ejercicio pensemos ahora cuáles pueden ser algunas primitivas para nuestra función original, $f(x) = sen(x) + 1.5$, que es una suma entre dos expresiones, una trigonométrica y otra constante. Sabemos que:

- la derivada de una suma es la suma de las derivadas,
- la derivada de $cos(x)$ es $-sen(x)$, y
- la derivada de una expresión lineal es una constante.

Entonces, si elegimos para el primer término $-cos(x)$ y $1.5x$ para el segundo, tenemos que una primitiva de $f(x)$ puede ser $F(x) = -cos(x) + 1.5x$ al cual tendríamos que sumarle algún número real cualquiera (como vimos en el caso anterior de la función afín). A esto se lo conoce como *«Integral Indefinida»*.

Pero sabemos que en el caso del área bajo la curva de nuestro problema inicial el valor es *único* y *determinado*, el asunto entonces es encontrar el valor de la *primitiva* correspondiente para la función f.

Supongamos la existencia de $F(t)$ como una primitiva cualquiera de $f(t)$, entonces $F'(t) = f(t)$. Siendo la diferencia entre $A(t)$ y $F(t)$ un número (por lo visto en la gráfica anterior), es decir que $A(t) = F(t) + k$, donde k es un número real.

Si hacemos que $t = a$, entonces $A(a) = F(a) + k$. Pero esa área es nula por definición porque es el área entre a y a, es decir que $A(a) = 0$. Lo que quiere decir que $0 = F(a) + k$, y luego $k = -F(a)$. Y si $F(t)$ es primitiva de $f(t)$ entonces $A(t) = F(t) + k = F(t) - F(a)$.

Por lo tanto, si expresamos el área tal como la definimos al comienzo obtenemos que:

$$A(t) = \int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Por lo tanto, de forma general tenemos que siendo $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$, continua en $[a, b]$ y positiva en (a, b) se cumple que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

A esta expresión se la conoce como *«Regla de Barrow»*, la cual permite encontrar la *«integral definida»* de la función entre los valores a y b.

Volviendo al problema del planteo original, para encontrar el área exacta bajo la curva de la gráfica de la función $f(x) = sen(x) + 1.5$, entre $[0, 6]$ y el eje x, tenemos que aplicar esta regla, donde $a = 0$ y $b = 6$. Y como ya encontramos una primitiva para nuestra función nos queda:

$$A = \int_0^6 (sen(x) + 1.5)dx = (-cos(6) + 1.5 \cdot 6 + k) - (-cos(0) + 1.5 \cdot 0 + k) \simeq 8.0398 - (-1) \simeq 9.0398m^2$$

[26]

Podemos corroborar estos cálculos con *GeoGebra* con el comando *Integral()* dando como argumento la función, el valor inicial y el final:

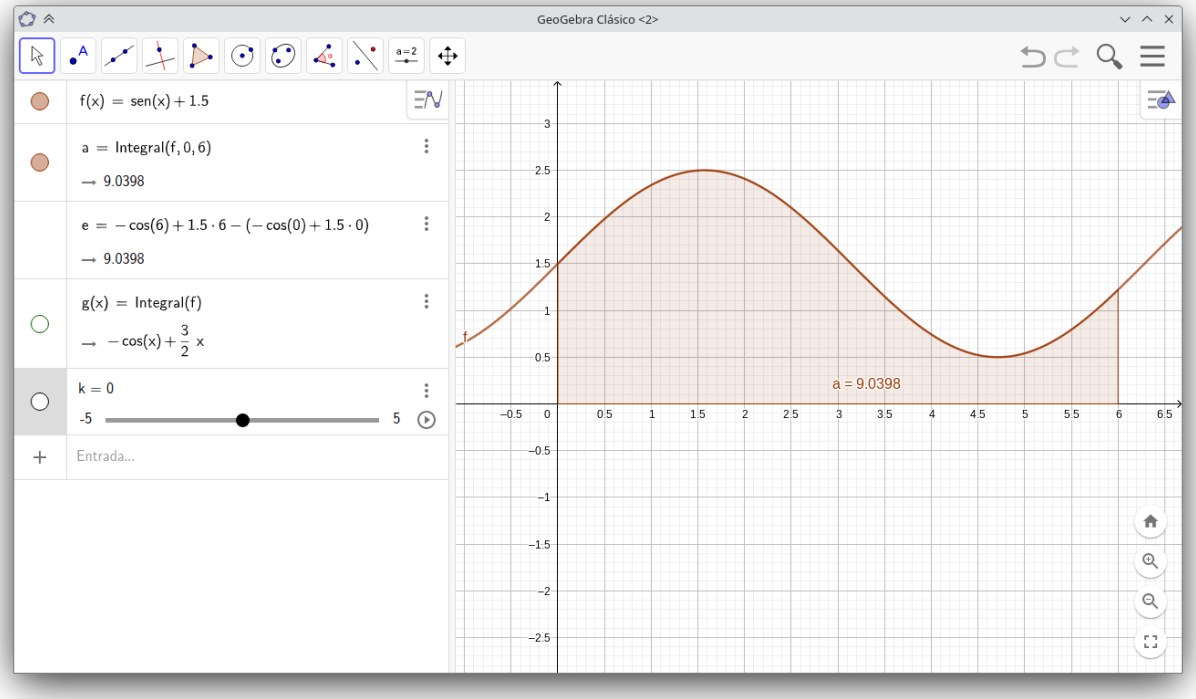


Figura 2.116: El cálculo de la integral e coincide con el comando $Integral(f, 0, 6)$ en *GeoGebra*. Por último, el comando $Integral(f)$, sin argumentos adicionales calcula la expresión de la integral indefinida con el valor k como un deslizador inicialmente en 0.

Las siguientes notaciones se usan indistintamente para el cálculo de integrales definidas:

$$A = \int_0^6 (sen(x) + 1.5)dx = (-cos(x) + 1.5x + k)_0^6 = [-cos(x) + 1.5x + k]_0^6 = (-cos(x) + 1.5x + k) \,|_0^6$$

El docente deberá, a continuación, avanzar con el cálculo de funciones primitivas inmediatas de funciones elementales, como las potenciaciones, expresiones trigonométricas como $sen(x)$ y $cos(x)$, etc. Así como también con las propiedades de las funciones primitivas aplicada a la suma y resta de funciones, o el producto de una constante por una función.

Por último el docente podrá seguir elaborando casos especiales como el área definida entre dos curvas o el área de funciones que ocupan regiones positivas y negativas en el intervalo dado. En particular, *GeoGebra* posee el comando *IntegralEntre()* que permite calcular el área entre la gráfica de dos funciones en un mismo intervalo.

[26] Como se ha mencionado en la preparación, en análisis matemático o cálculo los argumentos de las funciones trigonométricas son siempre en radianes, salvo que se indique lo contrario. El docente debe asegurarse que la calculadora tenga el indicador R en la pantalla. Y en *GeoGebra* tendrá que configurar esto en Propiedades→Álgebra→Unidad angular→Radianes.

Por ejemplo, para encontrar el área de la región del plano que se encuentra entre las parábolas f y g se debe hallar primero los puntos de intersección A y B. Luego, con el comando *IntegralEntre()* se calcula automáticamente su área. Si este cálculo se hiciera de forma manual deberíamos calcular la resta entre las integrales definidas de ambas funciones entre sus intersecciones.

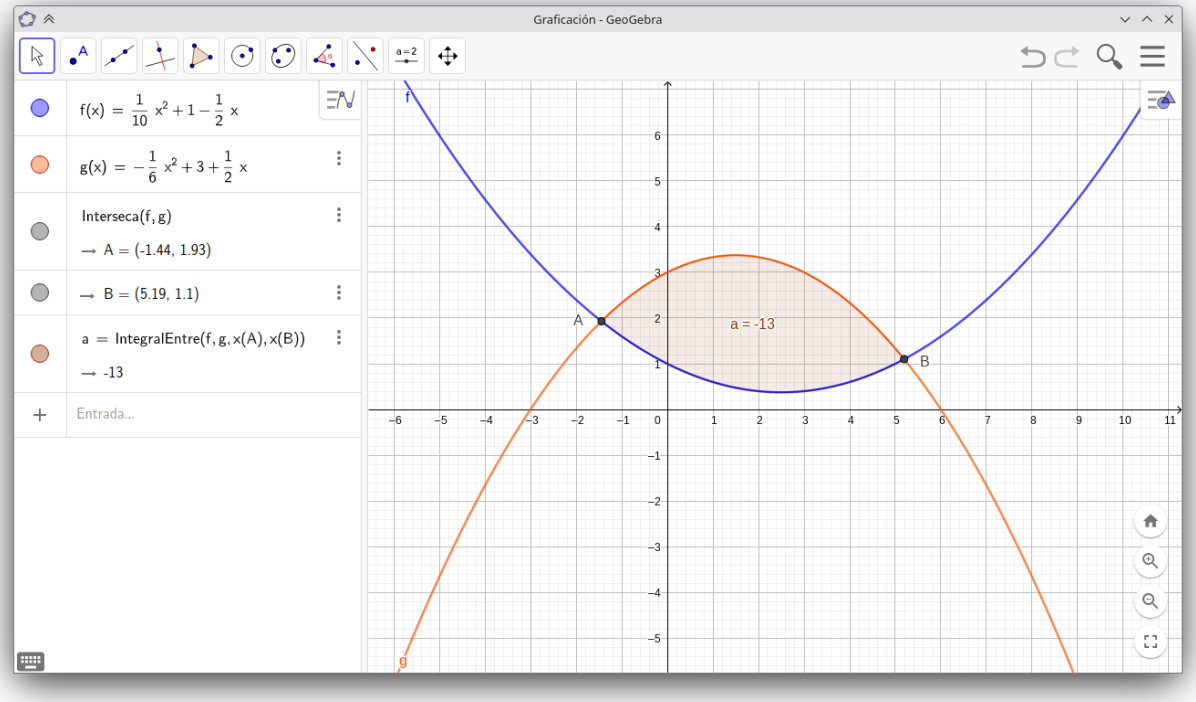


Figura 2.117: *GeoGebra* simplifica muchos pasos en un solo comando.

Otro ejemplo muy interesante es encontrar el área del círculo de radio 1 mediante el cálculo integral. Sabemos, por fórmula que el área es $A_c = \pi \cdot r^2$, por lo tanto $A_c = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Ahora, mediante cálculo tenemos que emplear la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$. Despejando y quedan dos funciones, una positiva y otra negativa:

$$y = \pm\sqrt{-x^2 + 1}$$

Cada parte genera un semicírculo (superior e inferior). Entre ambas conforman el círculo de radio 1, donde verifica que el área es $\pi = 3.14...$:

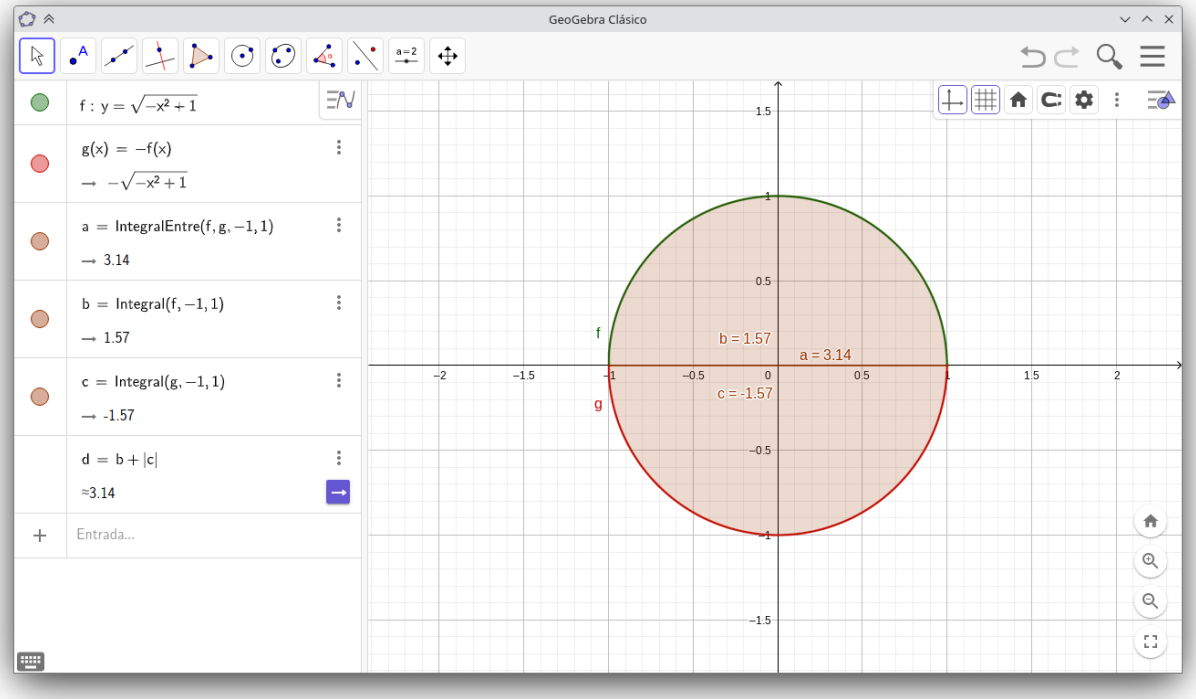


Figura 2.118: f y g son las funciones que generan sendos semicírculos. Nótese el área «negativa» del semicírculo inferior, que debe ser interpretado con su valor absoluto.

2.4. Geometría analítica

2.4.1. La recta en el plano cartesiano

Nombre: El problema del ahorro mensual.

Resumen: En esta actividad se trabaja en primer lugar el concepto de pendiente de la recta y la ordenada al origen analizando el ahorro en una alcancía. Luego se comparan pendientes para determinar si son paralelas.

Objetivo: Explicar y graficar la recta en un sistema de ejes cartesianos: Pendiente y ordenada al origen. Paralelismo entre dos rectas.

Saberes: Sistemas de ejes cartesianos, pares cartesianos, concepto de recta en el plano.

Edad: 12 a 14 años.

Preparación Este problema no requiere el uso de herramientas especiales más que el de la utilidad «Pendiente», que es sencilla de utilizar y sirve precisamente para encontrar la inclinación de una recta o segmento, expresada como número decimal.

Planteo

Una persona coloca un ahorro fijo, mes a mes, en una alcancía donde ya tenía cierta cantidad de dinero. Al fijarse en la alcancía, el tercer mes tenía $\$6 mil$ y en el séptimo ya había alcanzado los $\$8 mil$.

1. ¿Es posible saber cual es el monto que había en la alcancía antes de comenzar con el ahorro?
2. ¿Se puede saber cuánto dinero tendrá en esa alcancía al finalizar un año?, ¿es posible saber cuánto aporta a la alcancía cada mes?
3. Si el monto inicial fuera exactamente el doble del dinero, ¿cuánto tendría a los 3 meses? ¿y a los 12 meses?

Figura 2.119: Imagen ilustrativa del problema. Generada por Gemini IA y modificada por el autor.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: La persona agrega un monto de dinero fijo mensual en una alcancía que ya contenía cierta cantidad desconocida. A los 3 meses, tenía $\$6 mil$ y a los 7 meses, $\$8 mil$. En principio se pide conocer el monto original y también al año, así como también el valor mensual que ahorra. Luego se pide calcular una situación similar pero con el doble de dinero inicial en la alcancía.
2. *Pensar una estrategia*: Es posible que la primer estrategia implique hacer algunos cálculos utilizando regla de tres simple, estrategia que como veremos más adelante no funcionará debido a que el problema no es una función de proporcionalidad directa, sino que responde a una función afín.
   Por otra parte podrá darse la estrategia de realizar algunas operaciones aritméticas o ecuaciones donde se puedan incorporar los datos del problema y que permitan interpolar y extrapolar los valores de ahorro al

primer mes. Para ello habrá que centrarse en hallar el valor del ahorro mensual conociendo la diferencia de tiempo y dinero ahorrado. En este sentido, también es posible que los alumnos se apoyen en alguna gráfica, como una recta numérica, donde puedan ubicar los valores de los ahorros y así guiarse mejor.

3. *Ejecutar el plan:* Los alumnos que hayan optado por realizar reglas de tres simple pronto se darán cuenta que la proporción «3 es a 6 como...» es falsa porque al hacer la cuenta con 7 no se llega a $\$8mil$. El docente deberá estar atento a estas actuaciones para intervenir con alguna pregunta que permita poner en duda esa estrategia.
   Los que opten por la estrategia de calcular el ahorro mensual en primer lugar buscarán la diferencia entre los meses y lo ahorrado: del tercero al séptimo mes hay 4 meses, con un ahorro igual a $\$8000 - \$6000 = \$2000$. Es decir, si mes a mes se ahorra cierta cantidad x, sabrán que en cuatro meses será $4x$, y precisamente en esos meses se ahorró \$2000, por lo tanto:
   $4x = 2000$
   $x = 2000/4$
   $x = 500$, que es parte de la respuesta 2, es decir, el ahorro mensual.
   Ahora, siendo que por mes ahorra \$500, entonces inicialmente (3 meses antes de los \$6000) había:
   $\$6000 - 3 \times \$500 = \$4500$, que da respuesta a la primer pregunta
   Luego, para responder la otra parte de la segunda pregunta hacemos:
   $\$4500 + 12 \times \$500 = \$10500$
   La respuesta a la última pregunta se da multiplicando por 2 el monto inicial, pero conservando el ahorro mensual de \$500:
   $\$4500 \times 2 + 3 \times \$500 = \$10500$, que es el monto a los 3 meses
   $\$4500 \times 2 + 12 \times \$500 = \$15000$, que es el monto ahorrado al año

4. *Verificar y repensar la solución.* El docente tendrá que prestar especial atención a cómo los alumnos desarrollen los razonamientos de los cálculos. Algunos no utilizarán ecuaciones para calcular la tasa de ahorro mensual, sino que realizarán la cuenta $2000/4$ directamente, lo cual también es válido. Es posible que para la última pregunta los alumnos estén tentados no solo a duplicar el valor inicial, sino también la tasa de ahorro, aumentándola de \$500 a \$1000. El docente deberá remitirse al enunciado del planteo para aclarar este error.

Validación

Para esta etapa pensamos en una tercer estrategia que nos lleva directamente al objetivo didáctico planificado, consignando los datos iniciales como puntos en el plano. Para esto se analizará la situación sobre un sistema de ejes cartesianos, meses versus dinero en la alcancía, donde la primer componente será el mes y la segunda componente el valor ahorrado en miles de pesos. Luego se tratará de buscar un patrón de regularidad para dar respuesta a las preguntas.

Se grafica en *GeoGebra* los puntos $(3, 6)$ y $(7, 8)$ para poder entender la situación.

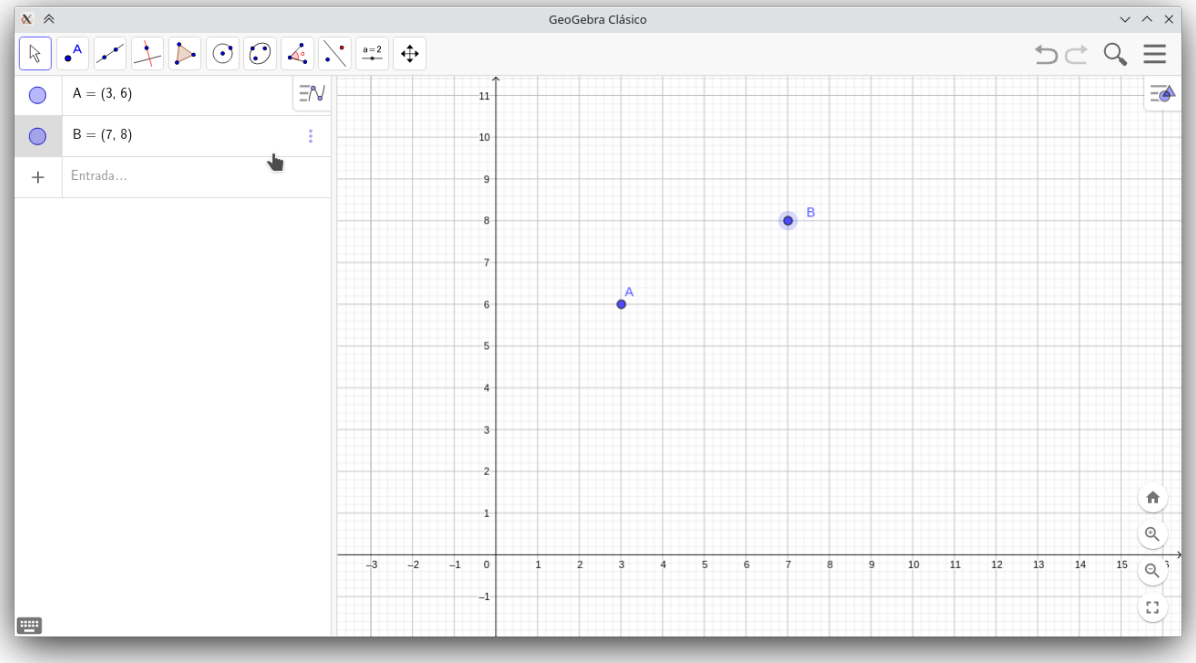


Figura 2.120: En el eje horizontal se marcan los meses, y en el vertical el dinero ahorrado (contado en miles de pesos).

En la resolución se halló el valor de ahorro mensual haciendo el siguiente razonamiento: para poder saber cuánto dinero existía en la alcancía al inicio hay que pensar en que esta persona ahorra siempre una suma fija, y del tercer al séptimo mes logró ahorrar $\$2 mil$, por lo que mensualmente ahorra $\$2 mil / 4 meses = \$500$ por mes, es decir $0,5$ en la gráfica.

Marcamos los puntos $(4, 6.5)$, $(5, 7)$, $(6, 7.5)$:

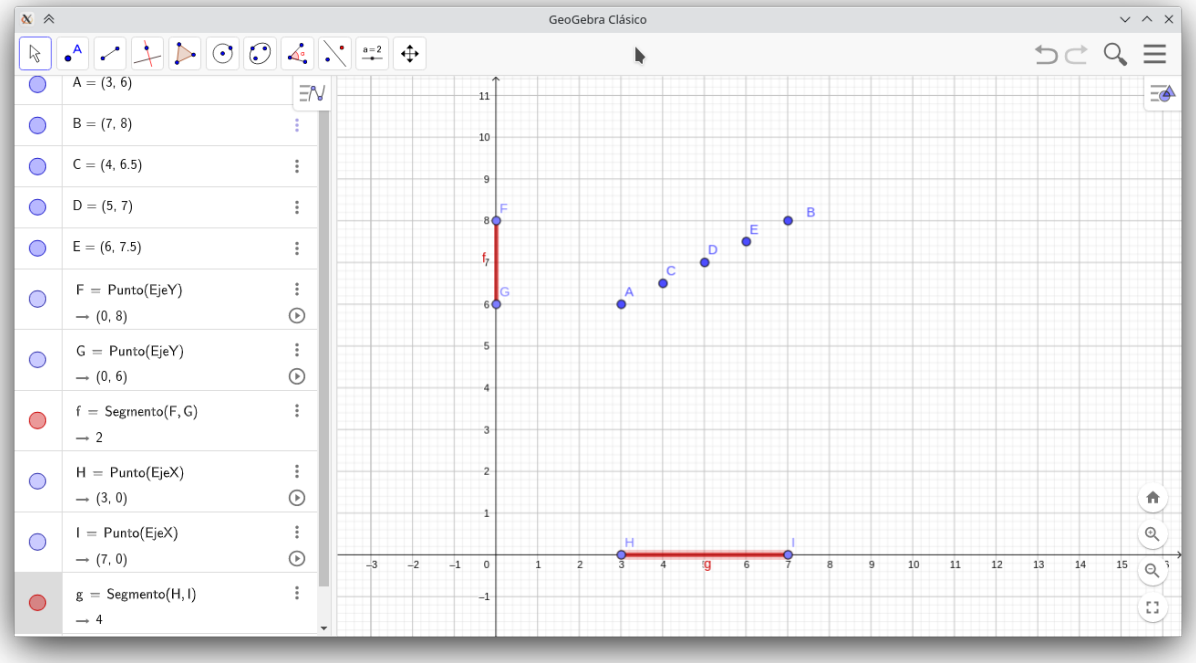


Figura 2.121: Ahorro en los meses 3 a 7, \$2000 en 4 meses. Mes a mes aumenta $0,5$ (\$500)

Se observa un patrón de comportamiento para los puntos: parecen alineados. Para comprobarlo hacemos pasar una recta que pase por A y B, luego veremos que los puntos C, D y E pertenecen a la recta.

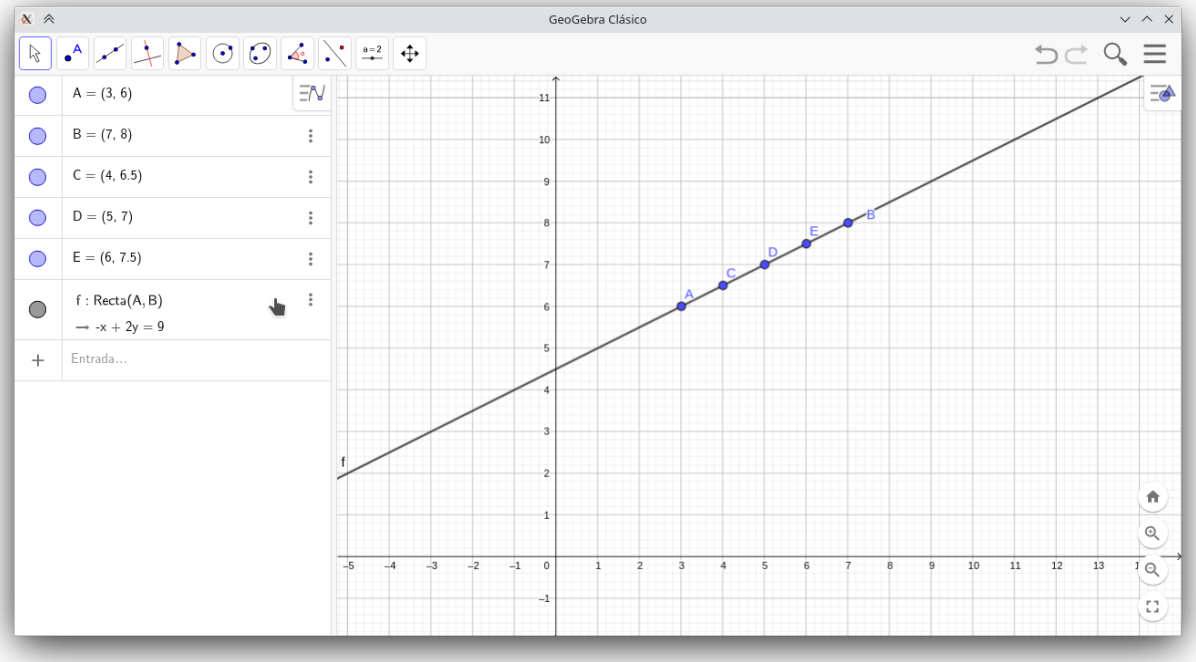


Figura 2.122: Todos los puntos están sobre una misma recta «f».

¿Es posible saber cual es el monto que había en la alcancía antes de comenzar con el ahorro? De la gráfica se deduce que el valor inicial es \$4500, ya que coincide con la abscisa en 0. También se observa que a los 12

meses el valor del ahorro es de $10500:

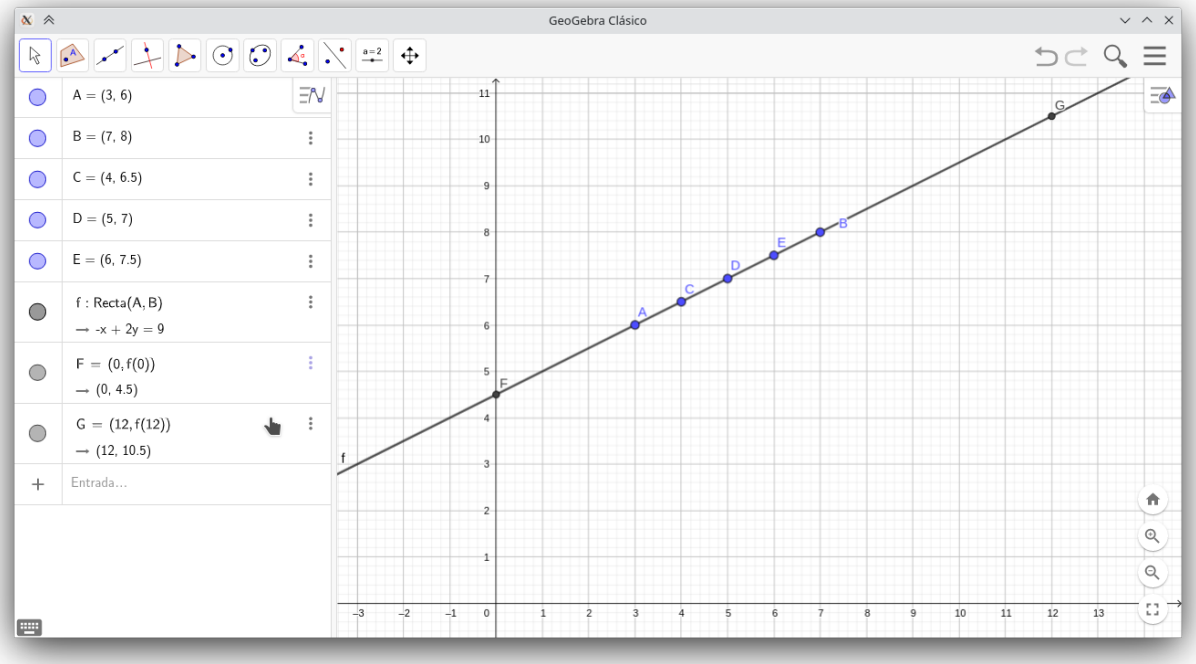


Figura 2.123: Para conseguir estos puntos se tomó la recta como una función, $(0, f(0))$ y $(12, f(12))$.

Solo falta responder la última pregunta. Para ello partimos del punto F, al que le duplicamos el valor de ordenada generando el punto $H = (0, 9)$, luego agregamos un nuevo punto, $I = (1, 9.5)$, correspondiente al primer mes de ahorro. Por último trazamos la recta entre ellos:

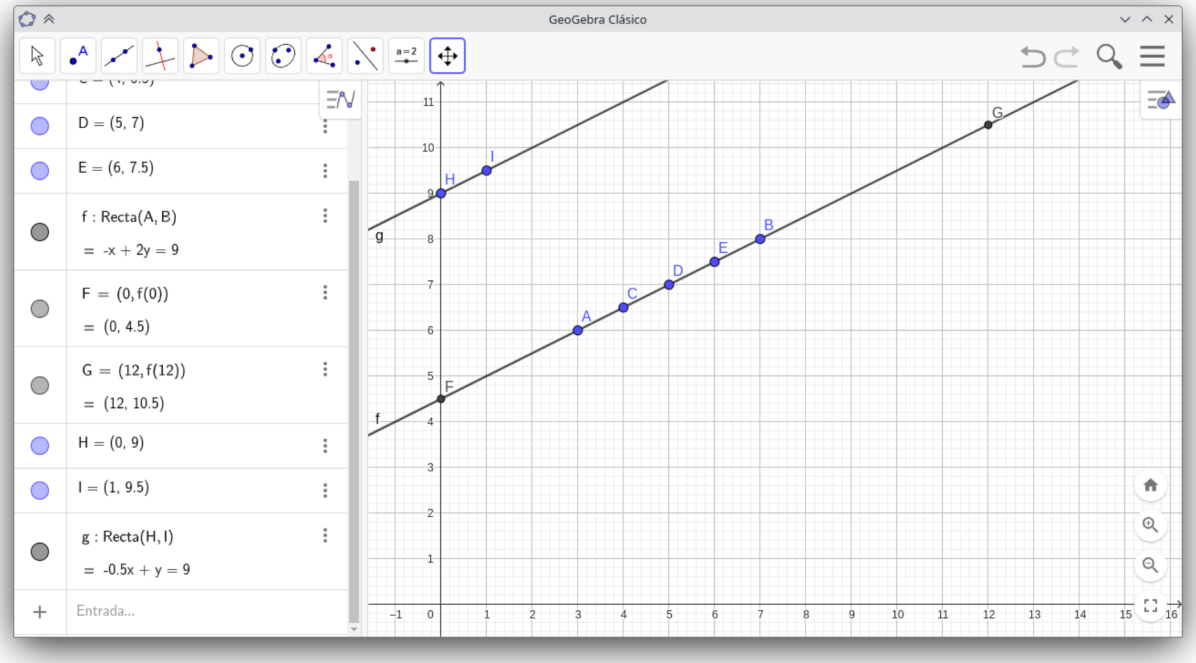


Figura 2.124: La nueva recta «$g : -0.5x + y = 9$» es paralela a la recta «$f : -x + 2y = 9$».

Resuelta la condición impuesta en la última pregunta se puede deducir, entonces, de esta última gráfica que a los 3 meses tendrá \$10500 y a los 12 meses \$15000.

Observamos que las dos rectas parecen paralelas, y para comprobarlo haremos que *GeoGebra* trace una recta paralela a «f» que pase por el punto H utilizando el comando «$Recta(Punto, Recta(Paralela))$»:

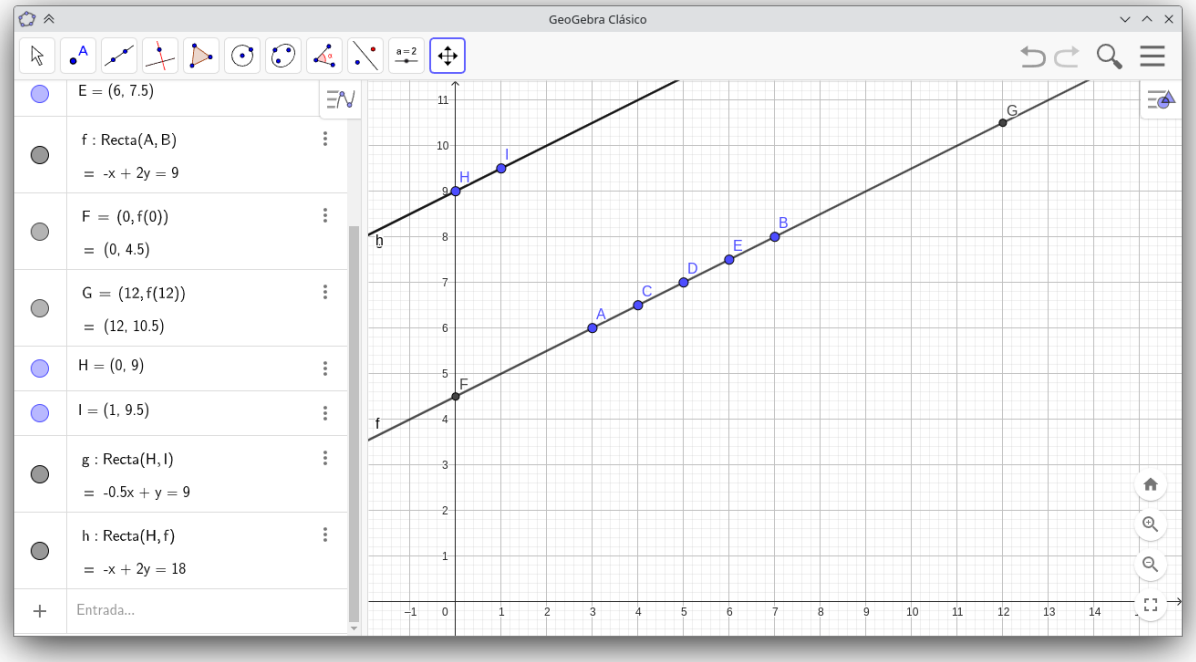


Figura 2.125: La recta «h» se superpone con «g», y como están solapadas se ve en «negrita».

Ahora comprobamos que la recta «g» es paralela a «f» porque la recta «h» coincide completamente con la recta «g». Y esto tiene sentido porque ambas rectas tienen la misma tasa de ahorro mensual, de \$500 ambas.

Sin embargo observamos algo raro en como *GeoGebra* muestra las ecuaciones de las rectas «g» y «h», que en realidad son la misma recta:

$g : -0.5x + y = 9$

$h : -x + 2y = 18$

¿Cómo podemos explicar ésto? Simplemente si multiplicamos la primer ecuación por 2 en ambos miembros no se altera la igualdad y obtenemos la segunda ecuación.

El docente deberá hacer notar que las ecuaciones de «f» y «h» son similares salvo por el valor del término independiente, lo cual servirá como disparador para explorar las diversas formas de las ecuaciones de la recta en el plano.

$f : -x + 2y = 9$

$h : -x + 2y = 18$

Formalización

Para finalizar la clase, e institucionalizar los contenidos didácticos, el docente deberá hacer las transformaciones necesarias de la ecuación «f» para llevarla a la forma *ordinaria* o *explícita* de la *ecuación de la recta* «$y = mx + b$»:

$f : -x + 2y = 9$

$f : 2y = 9 + x$

$f : y = 9/2 + x/2$

$f : y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

Aquí podrá mostrar el valor de la *pendiente* «m» y la *ordenada al origen* «b», $1/2 = 0.5$ y $9/2 = 4.5$ respectivamente:

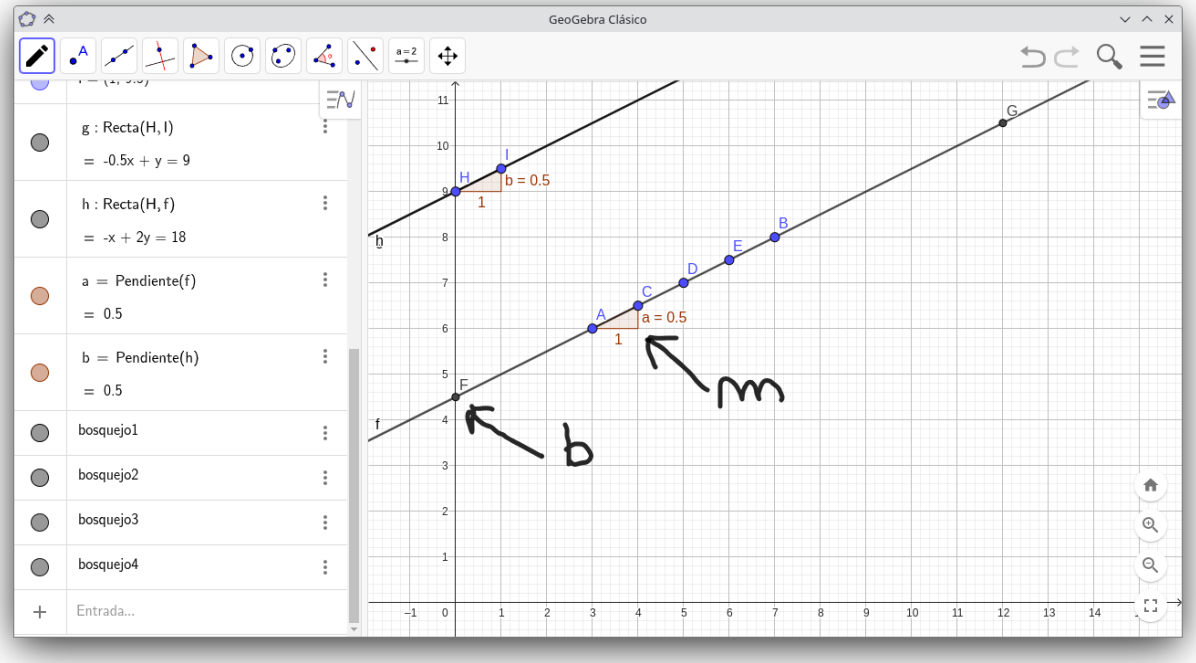


Figura 2.126: Se utilizó el comando «*Pendiente*(*Recta*)» para encontrar el valor de la pendiente de cada recta. Una herramienta súmamente útil en *GeoGebra* es el «lápiz» o herramienta de mano alzada que el docente usó para anotar «*b*» y «*m*».

Una vez definidos los términos de pendiente y ordenada al origen el docente podrá continuar definiendo otras formas de ecuaciones de la recta como la forma general y la forma *simétrica* o *canónica*.

Posteriormente se podrá continuar con la obtención de ecuaciones *paralelas* y *perpendiculares*, ecuaciones de la recta que pasa por uno y dos puntos, etc.

2.4.2. Sistemas de inecuaciones lineales

Nombre: Alfajores y turrones.

Resumen: El problema trata sobre la compra de golosinas en un quiosco, donde se dan ciertas condiciones en forma de desigualdades o inecuaciones.

Objetivo: Explorar soluciones enteras para un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas, de modo que se pueda visualizar en el plano cartesiano la solución como una nube de puntos que cumplen determinadas condiciones acotada en una región del plano.

Saberes: El plano cartesiano, Gráfica de ecuaciones lineales de dos variables, Inecuaciones.

Edad: 14 a 15 años.

Preparación En esta actividad se hace uso de la «planilla de cálculo» en *GeoGebra*, donde la tabla de datos ingresada se transforma luego en una lista de puntos en el plano. El docente podrá trabajar con un proyector mostrando el trabajo de validación en el proyector o bien cada alumno en su dispositivo podrá optar por hacerlo de forma local.

Planteo

Mateo quiere comprar turrones y alfajores con los $10 que tiene ahorrados. En el quiosco de la escuela cada turrón cuesta $1, y $2 cada alfajor. Al menos quiere comprar uno de cada uno, y no sabe si quiere gastar todo el dinero o no. ¿Cómo puede realizar la compra Mateo?, es decir, ¿Qué compras posibles de turrones y alfajores puede hacer?

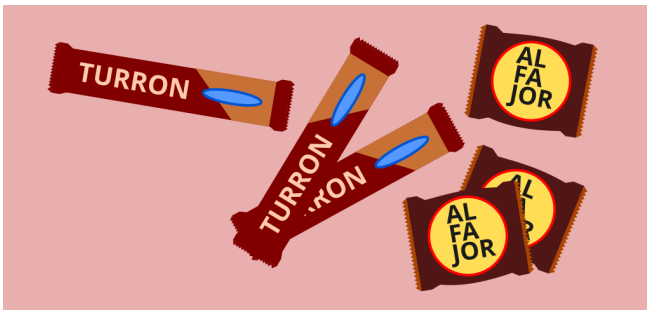


Figura 2.127: Alfajores y turrones.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema de Mateo consiste en analizar qué cantidades de turrones y alfajores puede comprar en el quiosco de la escuela con $10, sabiendo que cada turrón cuesta $1 y cada alfajor $2. Sabe que al menos uno de cada uno tiene que comprar y puede gastar todos sus ahorros o solo una parte. Se pregunta sobre las formas de combinar alfajores y turrones en una compra.

2. *Pensar una estrategia*: El problema tiene más de una respuesta, porque por ejemplo podría comprar un alfajor y un turrón, costándole $\$1 + \$2 = \$3$ de los $10 que tiene. También podría comprar 3 turrones y un alfajor, $\$3 + \$2 = \$5$, sin gastar todo su dinero. Es decir que las opciones son múltiples y se podría intentar armar una lista exhaustiva con las cantidades de turrones y alfajores que puede comprar a la vez. Una tabla también puede ser útil para ordenar la lista y no perder de vista ninguna solución.

3. *Ejecutar el plan:* Para comenzar a armar la lista se tendrá en cuenta que:
   - Al menos hay que comprar un turrón
   - Al menos hay que comprar un alfajor
   - Se puede gastar hasta $10

   Con estas premisas en mente, se armará una lista ordenada empezando por la compra de 1 turrón y 1 alfajor, luego 1 turrón y 2 alfajores... hasta llegar a $10 (si es posible), luego se procederá a comprar 2

turrones y 1 alfajor, 2 turrones y 2 alfajores... hasta llegar a \$10. Continuando así hasta donde se pueda con las condiciones anteriores, tratando de no omitir ninguna solución en el proceso. Para esto usamos la vista de hoja de cálculo de *GeoGebra*.

	A	B	C	D	E
1	Turrón	Alfajor	Total		
2	1	1	3		
3	1	2	5		
4	1	3	7		
5	1	4	9		
6	1	5	11		
7					

Figura 2.128: En la tabla la última columna indica el costo total de la compra. En nuestro caso optamos por hacer que *GeoGebra* calcule automáticamente el Total de la compra anotando la fórmula $= A2 + 2 \times B2$ en el casillero $C2$, de la misma manera en que se puede hacer con una planilla de cálculo estándar.

Como se puede observar en la linea 6 de la tabla al comprar 1 turrón y 5 alfajores nos pasamos de presupuesto (\$11), por lo que esa dupla queda descartada. Luego seguimos con 2 turrones + 1 alfajor... :

	A	B	C	D	E
1	Turrón	Alfajor	Total		
2	1	1	3		
3	1	2	5		
4	1	3	7		
5	1	4	9		
6	2	1	4		
7	2	2	6		
8	2	3	8		
9	2	4	10		
10					

Figura 2.129: La lista llega ahora hasta 2 turrones y 4 alfajores, puesto que su costo es \$10, el *máximo* posible a gastar.

Siguiendo con la misma lógica obtenemos la siguiente tabla final, siempre cuidando cumplir con los tres criterios dados:

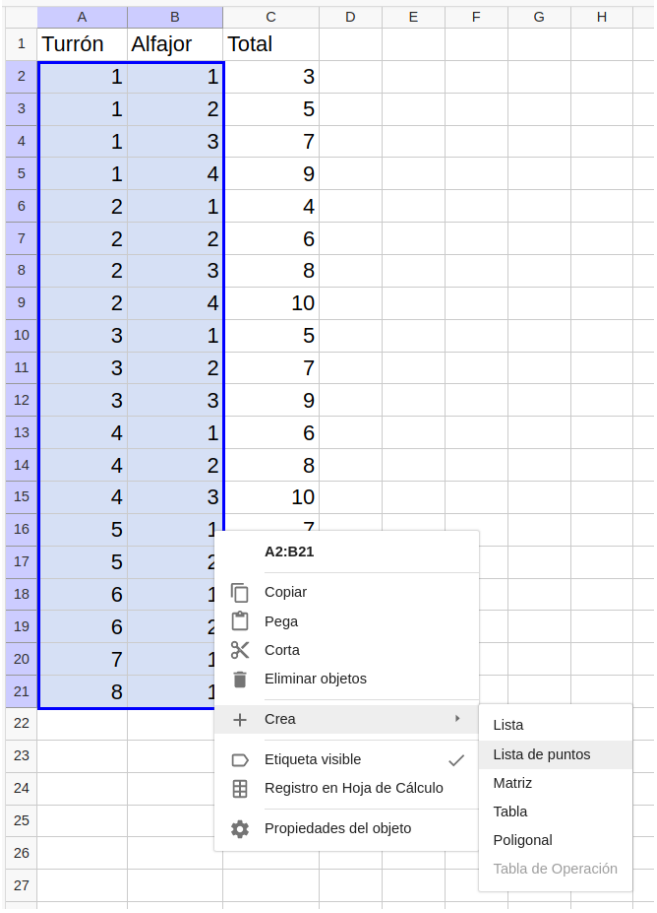
	A	B	C	D	E
1	Turrón	Alfajor	Total		
2	1	1	3		
3	1	2	5		
4	1	3	7		
5	1	4	9		
6	2	1	4		
7	2	2	6		
8	2	3	8		
9	2	4	10		
10	3	1	5		
11	3	2	7		
12	3	3	9		
13	4	1	6		
14	4	2	8		
15	4	3	10		
16	5	1	7		
17	5	2	9		
18	6	1	8		
19	6	2	10		
20	7	1	9		
21	8	1	10		
22					

Figura 2.130: Hay 21 duplas que solucionan el problema.

4. *Verificar y repensar la solución.* Es posible que algunos opten por iniciar la tabla de manera inversa a la dada, es decir, primero contar los alfajores y luego los turrones. A fines prácticos las soluciones serán las mismas, pero las duplas aparecerán invertidas. También es de esperar que algunos alumnos armen una lista exhaustiva pero con algún otro criterio de modo que el orden de las soluciones sea distinto al presentado aquí.

Validación

En esta etapa se tratará de comprender cómo se pueden visualizar las soluciones encontradas desde una perspectiva gráfica. Para esto transformaremos todas las duplas en puntos, seleccionando desde la casilla $A2$ hasta la $B21$, y con el botón derecho indicamos a *GeoGebra* que cree una lista de puntos.



	A	B	C
1	Turrón	Alfajor	Total
2	1	1	3
3	1	2	5
4	1	3	7
5	1	4	9
6	2	1	4
7	2	2	6
8	2	3	8
9	2	4	10
10	3	1	5
11	3	2	7
12	3	3	9
13	4	1	6
14	4	2	8
15	4	3	10
16	5	1	
17	5	2	
18	6	1	
19	6	2	
20	7	1	
21	8	1	

Figura 2.131: Con esta opción, *GeoGebra* crea una lista de puntos en el panel de la Vista Algebraica

A la vez, podemos ver los puntos graficados en la Vista gráfica:

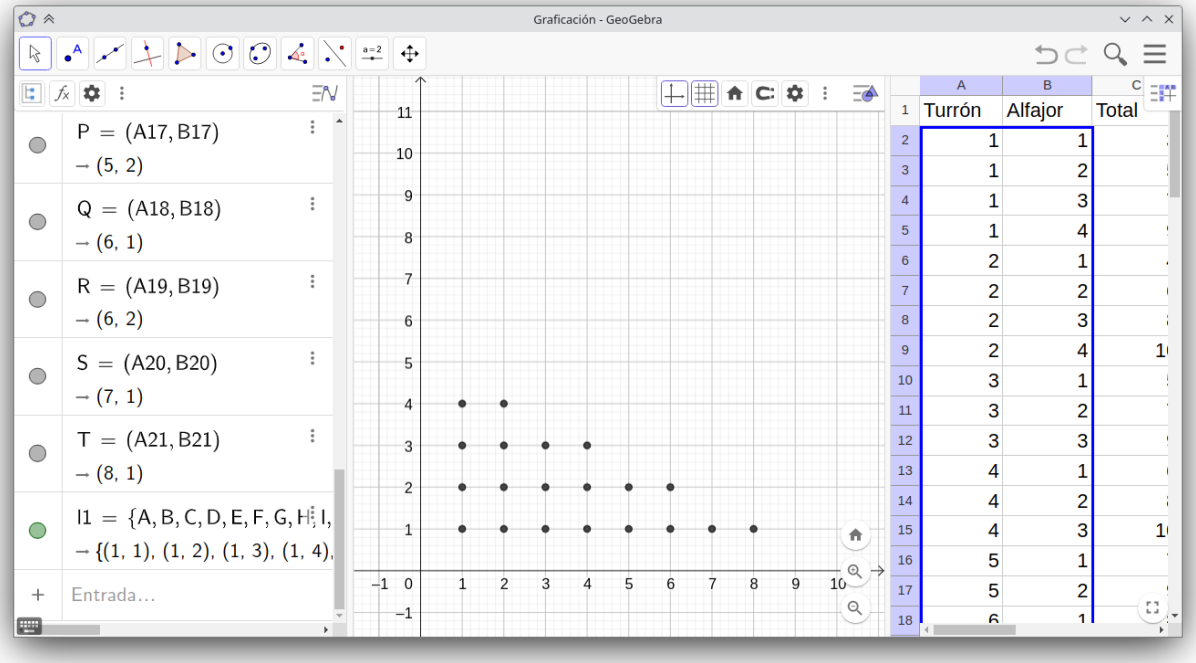


Figura 2.132: Los puntos graficados son los únicos que solucionan el problema de Mateo. Éstos parecen estar encerrados en un polígono.

Para entender mejor cómo están acotados estos puntos traduciremos las siguientes sentencias coloquiales en expresiones algebraicas:

- Al menos hay que comprar 1 turrón.
- Al menos hay que comprar 1 alfajor.
- Se puede gastar hasta \$10

Siendo que para las duplas de soluciones hemos asignado la primer componente (turrones) al eje x y la segunda (alfajores) al eje y, y haciendo uso de desigualdades, nos queda:

- $x \geq 1$ (hay que comprar 1 o más turrones).
- $y \geq 1$ (hay que comprar 1 o más alfajores).
- $x+2y \leq 10$ (se entiende como «el costo de las golosinas es menor a \$10», es decir $\$1 \times turrón + \$2 \times alfajor \leq \$10$).

Si ingresamos estas desigualdades en *GeoGebra* podemos observar algo interesante:

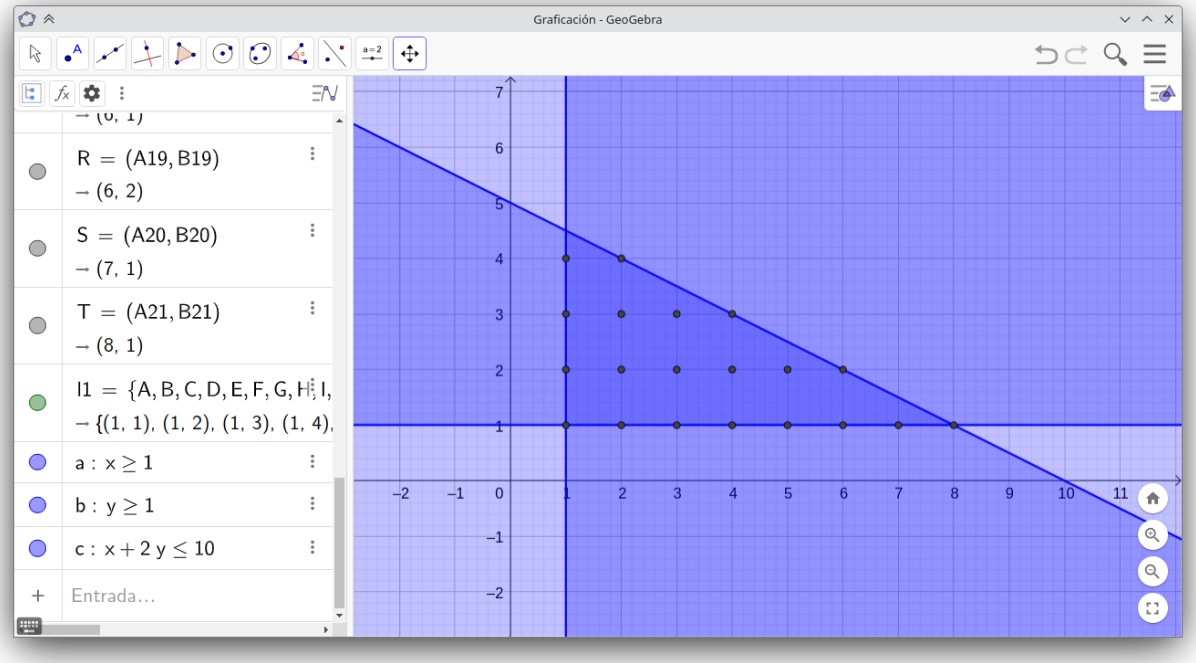


Figura 2.133: Todos los puntos quedan dentro o sobre la línea de un triángulo formado por las tres inecuaciones.

Cada inecuación graficada delimita una región en el plano (un semiplano). Por ejemplo $x \geq 1$ grafica una recta en $x = 1$ y sombrea hacia la derecha todos los valores donde se verifica que los valores de x son mayores o iguales a 1. De igual forma lo hacen las otras dos desigualdades.

Como resultado vemos que al graficar las tres inecuaciones forman un triángulo azul más oscuro que indica la solución del sistema (que nosotros ya habíamos encontrado en la lista de puntos).

Formalización

Las tres expresiones anteriores forman un Sistema de Inecuaciones de dos variables (x e y). Los puntos del plano que verifican a la vez todas las inecuaciones conforman el conjunto solución del sistema.

En particular para este problema las soluciones debían ser enteras porque los valores de costo de los turrones y alfajores son enteros ($1 y $2). Dependerá de cada caso (contexto del problema) cómo será el conjunto solución, pero siempre estará acotado a la región del plano que quede definida entre todas las inecuaciones.

La clase podrá continuar mostrando ejemplos de distintos sistemas de inecuaciones donde los bordes sean abiertos, la región no sea de área finita, sistemas sin solución, etc. A partir de este problema se podrá avanzar en el estudio de la programación lineal y el análisis de los polígonos convexos (o región factible) que dan solución a los sistemas donde lo que se busca es optimizar respuestas.

2.5. Matrices

2.5.1. Introducción a las matrices y sus operaciones

Nombre: Batalla Matricial.

Resumen: La actividad permite introducir el concepto de matriz numérica a partir del juego de la batalla naval.

Objetivo: Definición de matriz y sus elementos. Operación de suma.

Saberes: Conocimientos básicos sobre planillas de cálculo, sistemas de ejes cartesianos.

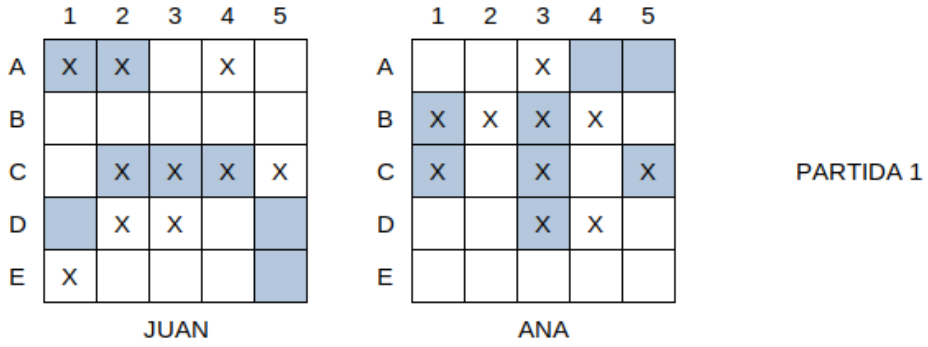
Edad: 15 a 16 años.

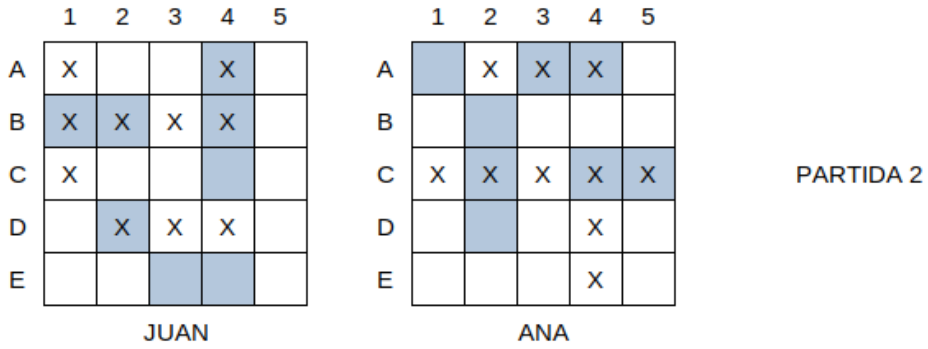
Preparación En este problema se hace una introducción a las matrices desde la «planilla de cálculo». La operatoria de matrices se hace, primero, utilizando fórmulas con las celdas en la planilla.

Planteo

Juan y Ana juegan a la *Batalla Naval* en tableros de 5×5, donde hay barcos de diferentes medidas: un barco de 1×1, dos barcos de 2×1 y un barco de 3×1 por cada jugador. En cada tablero los barcos están representados en celeste, y las cruces son los disparos del oponente. Son 10 disparos por jugador.

Luego de tres partidas jugadas, más allá de quién ganó cada partida, se preguntan en qué casilleros han hecho más disparos realizados y dónde han colocado más barcos. ¿Podrías ayudarlos?





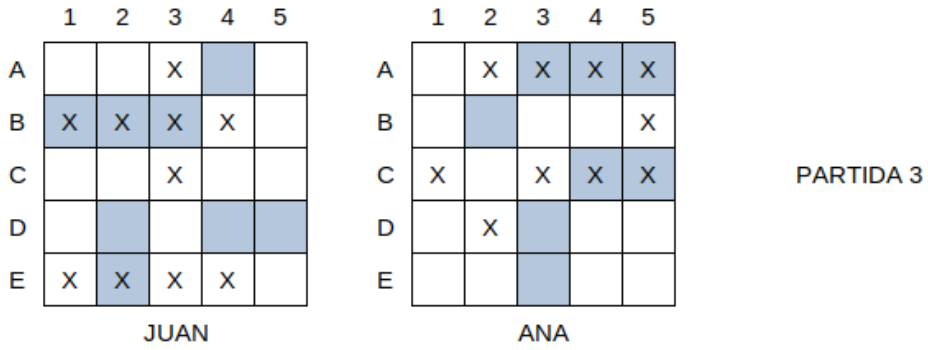


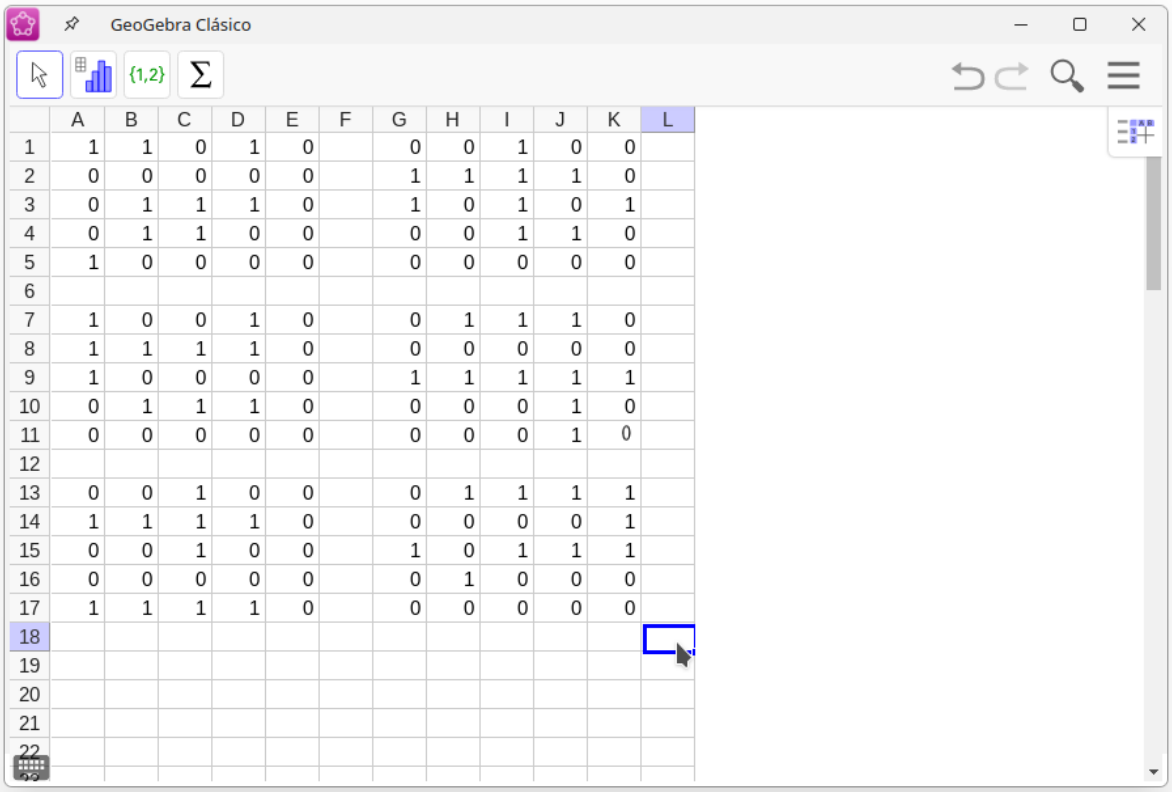
Figura 2.134: Tableros de las tres partidas de *Batalla Naval* entre Juan (izquierda) y Ana (derecha).

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: Los tableros muestran los barcos propios y los disparos del enemigo, por ejemplo en la primer partida ha ganado Juan, ya que en el tablero de Ana aparecen hundidos un barco de 1×1, uno de 2×1 y otro barco de 3×1. En cambio en el tablero de Juan solo hay dos barcos hundidos, uno de 2×1 y otro de 3×1.

2. *Pensar una estrategia*: Se puede utilizar la *Hoja de Cálculo* de *GeoGebra* de forma análoga a los tableros del juego, colocando un número «1» por cada disparo realizado, luego queda sumar el acumulado del mismo casillero en cada tablero para saber cuántos disparos se han realizado en ese lugar. La misma estrategia se puede usar para la ubicación de los barcos.

3. *Ejecutar el plan:* En la *Hoja de cálculo* de *GeoGebra* cargan los tableros con igual disposición que en la imagen anterior, de forma que queden «1» en las casillas que tienen un disparo realizado y «0» en los que no.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1	1	0	1	0		0	0	1	0	0	
2	0	0	0	0	0		1	1	1	1	0	
3	0	1	1	1	0		1	0	1	0	1	
4	0	1	1	0	0		0	0	1	1	0	
5	1	0	0	0	0		0	0	0	0	0	
6												
7	1	0	0	1	0		0	1	1	1	0	
8	1	1	1	1	0		0	0	0	0	0	
9	1	0	0	0	0		1	1	1	1	1	
10	0	1	1	1	0		0	0	0	1	0	
11	0	0	0	0	0		0	0	0	1	0	
12												
13	0	0	1	0	0		0	1	1	1	1	
14	1	1	1	1	0		0	0	0	0	1	
15	0	0	1	0	0		1	0	1	1	1	
16	0	0	0	0	0		0	1	0	0	0	
17	1	1	1	1	0		0	0	0	0	0	
18												
19												
20												
21												
22												

Figura 2.135: Tableros con 0 y 1.

Ahora solo queda realizar las sumas casillero a casillero, respetando la posición de cada casilla para cada tablero:

2	3	4	4	1
3	3	3	3	1
4	2	5	3	3
0	3	3	3	0
2	1	1	2	0

Figura 2.136: Tabla de suma de disparos. La primer casilla es $1+0+1+0+0+0=2$.

Se observa que el casillero ubicado en la fila 3 y columna 3 de esta tabla tiene 5 disparos, y que por ejemplo el casillero de fila 4 - columna 1 no recibió ningún disparo.
De igual forma, empleando la misma estrategia se pueden cargar las tablas de barcos (que aquí no se hizo porque solo nos vamos a quedar con la idea del procedimiento).

4. *Verificar y repensar la solución*: Se puede validar la suma empleando la suma de casillas tradicional de las suites ofimáticas:

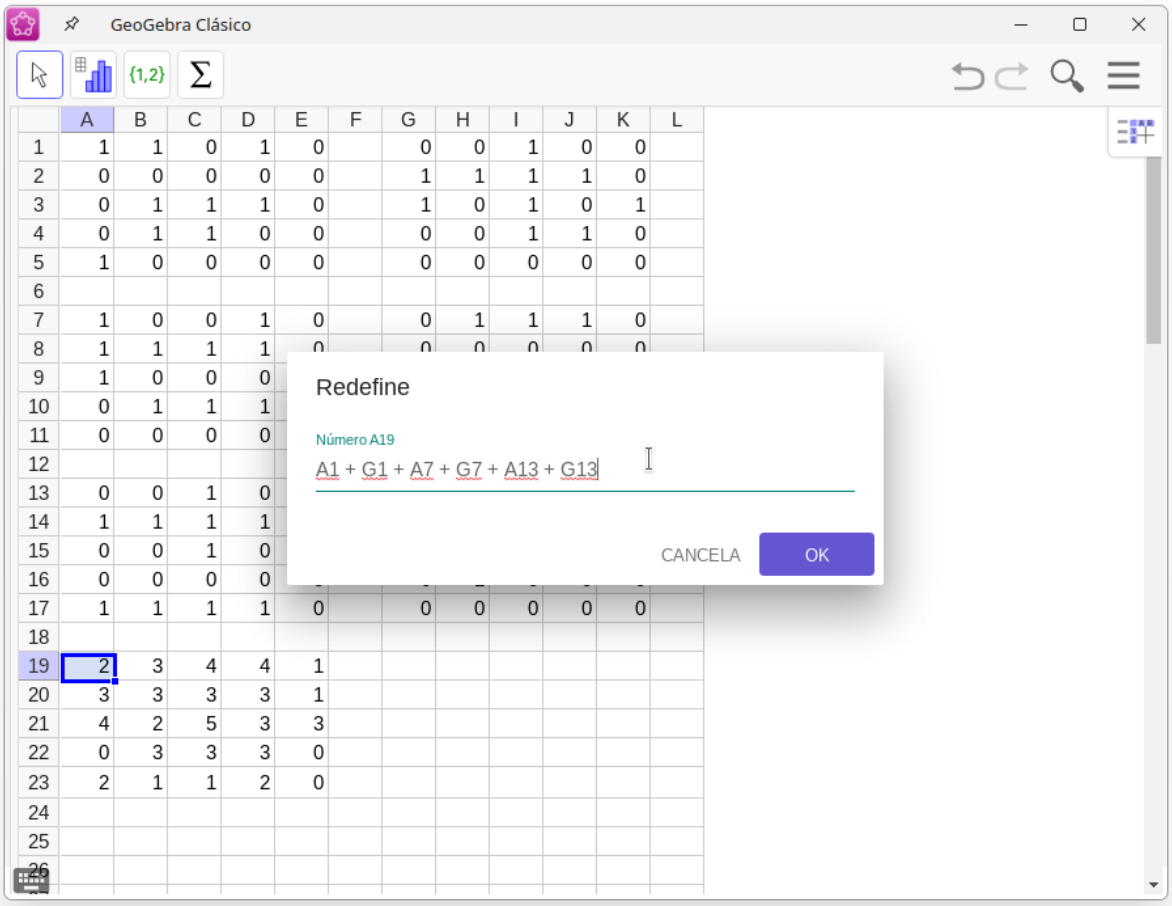


Figura 2.137: Suma de las casillas utilizando coordenadas de *Hoja de Cálculo*. Para obtener todas las casillas se puede arrastrar hacia la derecha y luego hacia abajo.

Puede ser una buena idea experimentar con tableros de otros tamaños, de manera que se pueda verificar que los procedimientos empleados funcionan también para ellos.

Validación

Creamos una «Matriz» por cada una de las tablas de la hoja de cálculo:

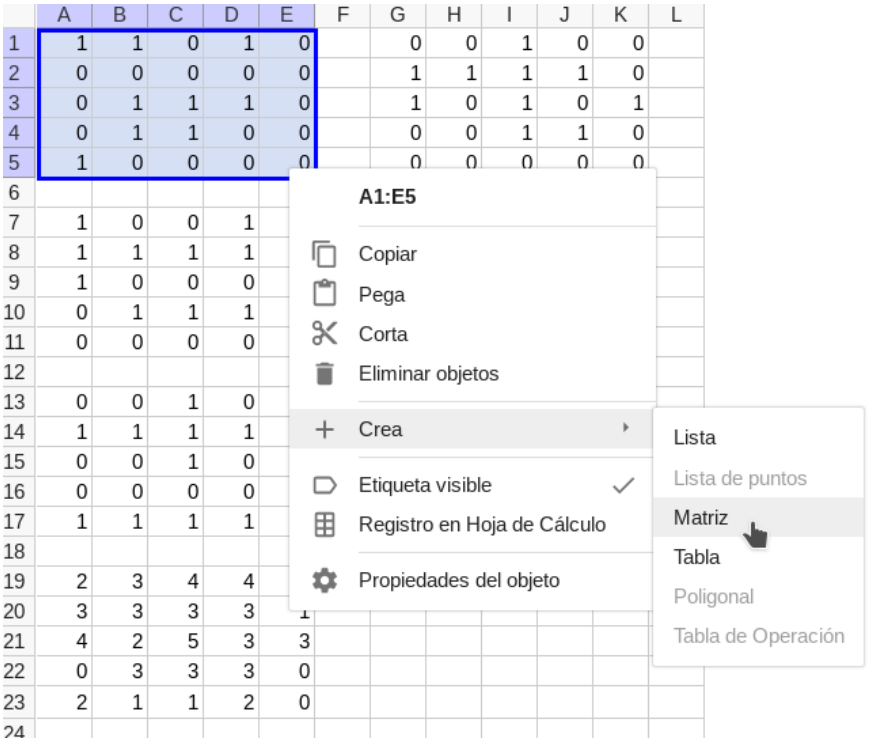


Figura 2.138: De «Tablas» a «Matrices».

Si activamos la *Vista Algebraica*, vemos que figuran ahora 6 matrices, $m1$ a $m6$, que podemos sumar algebraicamente en *GeoGebra* en una nueva matriz llamada $m7$:

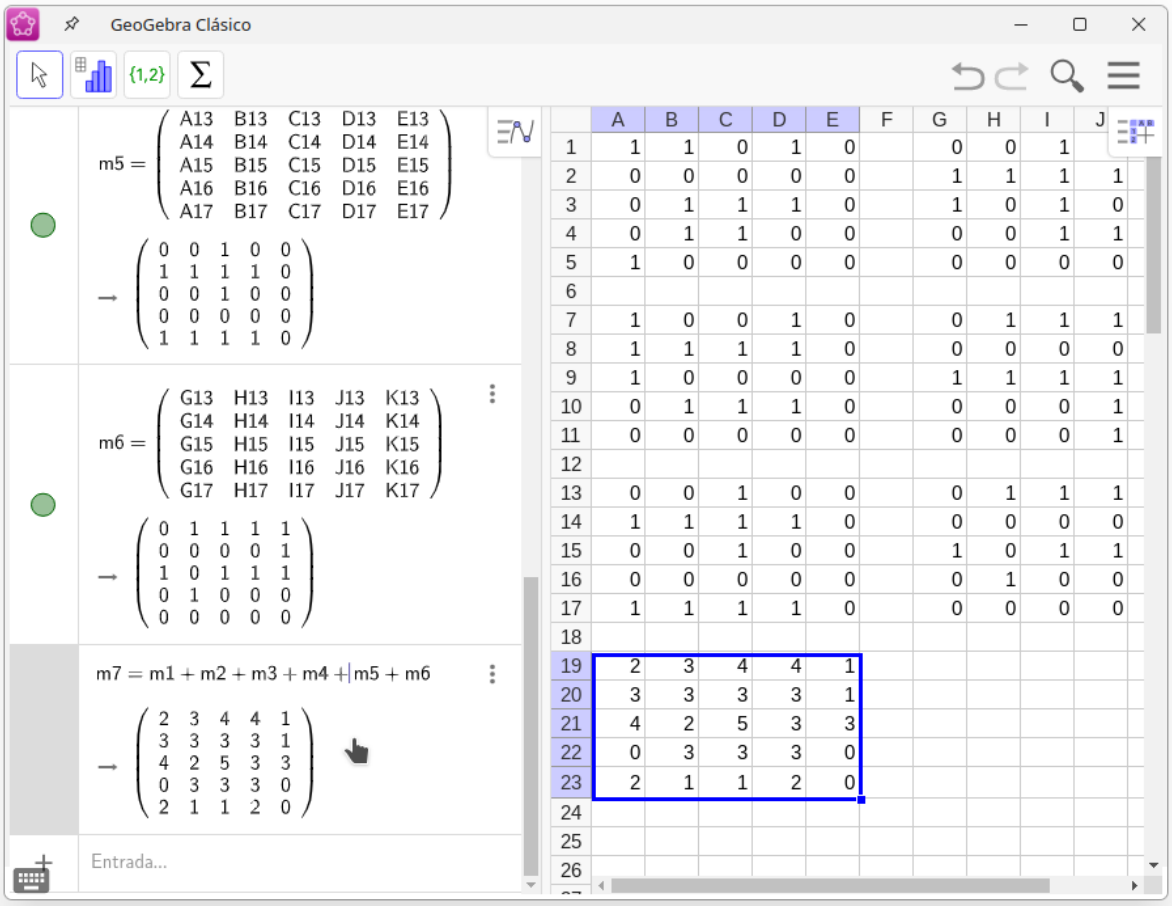


Figura 2.139: Matriz suma $m7 = m1 + m2 + m3 + m4 + m5 + m6$.

La nueva matriz, suma de $m1$ a $m6$, coincide con lo calculado anteriormente.

Nuevamente, se puede aplicar el mismo procedimiento para sumar las casillas donde se ubican los barcos.

Se sugiere agregar matrices de diferentes tamaños e intentar realizar las sumas, para entender que solo es posible la misma si los tamaños y disposiciones coinciden en filas y columnas respectivamente.

Formalización

Las tablas numéricas, vistas como tal, tienen su equivalente en matemática y se denominan matrices de «m» filas y «n» columnas. Cada elemento de la matriz puede ser localizado por sus coordenadas o posiciones en la fila «i» y columna «j».

Las sumas de matrices son aquellas operaciones donde se suman los elementos correspondientes en matrices donde coincidan las cantidades de filas entre sí y de columnas entre sí.

Otro concepto trabajado aquí es el de las *matrices cuadradas*, que son aquellas que tienen igual cantidad de filas que de columnas, es decir $m = n$.

Posteriormente el docente podrá avanzar con otras operaciones entre matrices y definiciones de tipos, ahora desde el significado que le ha aportado el contexto del problema.

2.5.2. Grafos y matrices de adyacencia

Nombre: Los seguidores en las redes.

Resumen: En esta actividad se introduce el concepto de grafo y las matrices de adyacencia utilizando una problemática de interés para los alumnos, como son las redes sociales.

Objetivo: Concepto y definición de Grafo. Potencia de matrices.

Saberes: Matrices, potencia de matrices.

Edad: 16 a 17 años.

Preparación La situación problemática implica trabajar en primer lugar con puntos y vectores para generar los esquemas gráficos de los grafos, luego se elaboran las matrices correspondientes.
El problema es cercano al mundo adolescente y por lo tanto es probable que ellos tengan alguna visión o forma de entender su estructura aunque no es claro que sepan explicarlo por escrito o de forma estructurada. El docente puede utilizar esta proximidad para motivar a que surjan mejores estrategias de resolución.
Se recomienda que la resolución se haga de forma grupal, o al menos que comience de esta manera y luego pase a una instancia individual.

Planteo

En el aula, cinco compañeros usan la famosa red social «Z»: Juan, Kiara, Lola, Mati y Nerea. Esta red permite seguir a otra persona sin necesidad que sea recíproco. Sabemos que:

- Juan sigue a Lola, Mati y a Nerea;
- Kiara sigue a Lola, Mati y Nerea;
- Lola solo sigue a Juan;
- Mati sigue a Juan y Kiara;
- Nerea solo sigue a su amigo Mati.

Kiara, que es muy inquieta, se pregunta cómo puede hacer para visualizar gráficamente quien es el compañero más seguido en el aula y quien el menos seguido.

También quiere saber, para cada uno de ellos, si a quienes ellos *siguen* los *siguen de vuelta*. Por ejemplo, Kiara sigue a Mati, y él la sigue a ella, por lo tanto cuenta como un caso.

Por último, se pregunta si existe una forma de saber, para cada uno de ellos, si un *seguido de un seguido* es también un *seguidor propio*. Por ejemplo, Mati sigue a Juan, él sigue a Nerea y a su vez ella lo sigue a Mati.

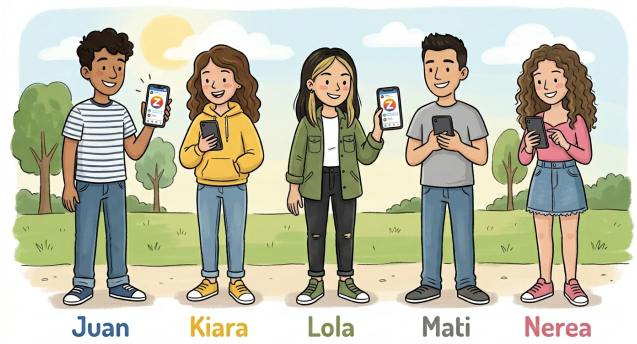


Figura 2.140: Los cinco compañeros usan la red social «Z», imagen ilustrativa. Generada por Gemini IA y modificada por el autor.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: La red social «Z» funciona como muchas otras existentes en la actualidad: es posible seguir a una persona aunque eso no implica reciprocidad. En el aula hay cinco compañeros, Juan, Kiara, Lola, Mati y Nerea que están en la red «Z» donde se establecen algunas relaciones de seguimiento, es decir, es un juego de seguidores y seguidos. ¿Quién sigue a quién?:
   - Juan sigue a Lola, Mati y a Nerea, $\Rightarrow J \to L; J \to M; J \to N$
   - Kiara sigue a Lola, Mati y Nerea, $\Rightarrow K \to L; K \to M; K \to N$
   - Lola solo sigue a Juan, $\Rightarrow L \to J$
   - Mati sigue a Juan y Kiara, $\Rightarrow M \to J; M \to K$
   - Nerea solo sigue a su amigo Mati, $\Rightarrow N \to M$

   Es notorio que no todos se siguen entre sí.
   El docente propiciará el debate para que los alumnos puedan poner en otras palabras lo que se plantea Kiara, que tiene los siguientes interrogantes:
   - ¿Es posible encontrar una forma gráfica que permita observar estas relaciones de forma sencilla a «golpe de vista»?
   - ¿Es posible saber quienes siguen de vuelta para cada compañero?
   - Determinar para cada uno de los compañeros si existen seguidores «de terceros», es decir si un *seguido de un seguido* es un *seguidor*.

2. *Pensar una estrategia*: El maestro intentará que los alumnos pongan en claro cómo son las relaciones «seguido» y «seguidor», conceptos que deberían darse de forma natural para ellos ya que utilizan este tipo de redes sociales de forma habitual. Motivará a que generen alguna gráfica en el papel donde los alumnos unan con flechas los nombres de cada uno de ellos y se noten estas relaciones, aunque a simple vista no sea fácil distinguir quien es el más seguido y quien el menos seguido.
   Una estrategia complementaria puede ser generar una tabla de doble entrada, donde se establezcan las relaciones entre cada compañero.

3. *Ejecutar el plan:* Los alumnos podrán avanzar con la gráfica de relaciones, haciendo la interpretación del texto y uniendo con flechas. Lógicamente la gráfica resultante es un *grafo*, aunque ellos conozcan ese termino.

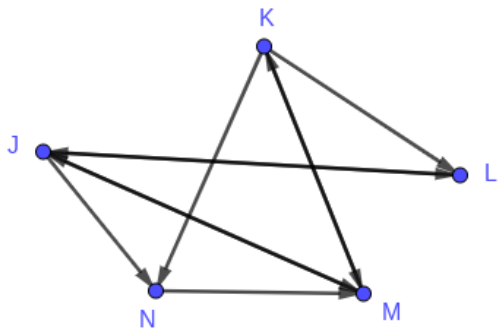


Figura 2.141: Gráfica de relaciones se seguimiento entre los compañeros, con las iniciales de cada uno. Las flechas indican el sentido de la relación, por ejemplo Juan sigue a Nerea, pero no es recíproco entre ellos. Lo mismo sucede en el caso de Nerea con Mati.

Con esta gráfica los alumnos contabilizarán cuántas flechas llegan a cada nodo, y de esta forma saber quién es el más seguido y quién es el menos popular. En particular se observa que Kiara es la menos seguida porque solo le llega una flecha. Mati parece ser el más seguido porque le llegan tres flechas. Con esto ya respondemos la primer pregunta.
El docente podrá guiar a los alumnos en esta idea, comentándoles que una buena forma de anotar los datos puede ser una planilla de cálculo.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Juan	Kiara	Lola	Mati	Nerea	
2	Juan	0	0	1	1	1	
3	Kiara	0	0	1	1	1	
4	Lola	1	0	0	0	0	
5	Mati	1	1	0	0	0	
6	Nerea	0	0	0	1	0	
7							

Figura 2.142: En la planilla se anotan los nombres de todos los compañeros tanto en las cabeceras de filas como de columnas.

Para rellenar la tabla se anota un 1 si hay seguimiento entre la cabecera de la fila con los de la cabecera de la columna, y un 0 cuando no sucede. Es decir, Juan no sigue a Juan, por lo tanto se anota un 0 en $B2$. Siguiendo con el procedimiento, Juan no sigue Kiara, entonces en $C2$ se coloca un 0. Juan sigue a Lola, por lo tanto en $D2$ se pone un 1. Así se completa la tabla, donde cada flecha de un amigo a otro significa un 1.
La segunda interrogante es un poco más compleja de resolver, y para ello se necesitará confeccionar una tabla con las relaciones de seguimiento o utilizar flechas de distintos colores cuando esto sucede.

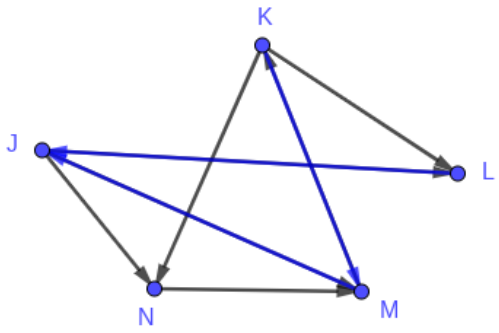


Figura 2.143: En azul, se pintaron las flechas donde el seguimiento es recíproco.

Se observa que las flechas en azul son las que vuelven al punto de partida: $J \to M \to J$, $J \to L \to J$, $M \to K \to M$, etc. Si llevamos estas relaciones a una tabla similar a la anterior se tiene:

9		Juan	Kiara	Lola	Mati	Nerea	
10	Juan	2					
11	Kiara		1				
12	Lola			1			
13	Mati				2		
14	Nerea					0	
15							

Figura 2.144: En esta tabla Juan se relaciona con sí mismo porque tanto Mati como Lola lo siguen de vuelta.

Si es posible el docente hará notar que lo que se está contando coincide con la cantidad de caminos de dos flechas consecutivas que existe para un mismo punto. Es importante resaltar esta idea porque se utilizará luego en la etapa de validación.
La tercera de las preguntas que se hace Kiara es mucho más compleja de resolver porque requiere revisar cada uno de los *seguidos de los seguidos* y verificar si hay seguimiento, en una especie de triángulo de seguimiento. Por ejemplo Juan sigue a Nerea, Nerea sigue a Mati y Mati sigue a Juan, es decir que un *seguido de un seguido* es un *seguido propio* ($J \to N \to M \to J$). Lola sigue a Juan, pero no hay seguidos por Juan que la sigan a Lola. En cambio con Nerea encontramos dos casos:$N \to M \to K \to N$ y

$N \to M \to J \to N$. La tabla resume lo hallado:

		Juan	Kiara	Lola	Mati	Nerea	
17							
18	Juan	1					
19	Kiara		1				
20	Lola			0			
21	Mati				2		
22	Nerea					2	
23							

Figura 2.145: En este caso solo se analizó la relación de cada uno con uno mismo, pasando por dos seguidos consecutivos.

4. *Verificación*: Los alumnos podrán comparar resultados en una etapa de verificación grupal coordinada por el docente. Éste tratará que ellos sistematicen sus respuestas en el pizarrón, graficando los esquemas con colores. En este momento el docente introducirá la idea de que las flechas hacen las veces de «caminos» que recorren las relaciones de seguimiento. Este concepto será especialmente útil en la siguiente etapa, cuando haya que abstraer dichas relaciones como números presentes en las matrices.

Validación

La etapa de validación consistirá en reforzar la idea de que una tabla es la forma más clara de organizar las relaciones de seguimiento, y aunque todavía los alumnos no lo sepan, éstas se transformarán luego en matrices.

El docente retomará la idea de que para la primer pregunta la relación de seguimiento directo equivale a dibujar una flecha en el esquema de puntos, es decir 1 camino entre los puntos indicados. A su vez la tabla de relaciones indica con un 1 cuando hay un seguimiento directo y con 0 cuando no. El docente hará que los alumnos creen una matriz a partir de los datos de la primera de las tablas:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Juan	Kiara	Lola	Mati	Nerea	
2	Juan	0	0	1	1	1	
3	Kiara	0	0	1	1	1	
4	Lola	1	0	0	0	0	
5	Mati	1	1	0	0	0	
6	Nerea	0	0	0	1	0	

$$m1 = \begin{pmatrix} B2 & C2 & D2 & E2 & F2 \\ B3 & C3 & D3 & E3 & F3 \\ B4 & C4 & D4 & E4 & F4 \\ B5 & C5 & D5 & E5 & F5 \\ B6 & C6 & D6 & E6 & F6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.146: Haciendo clic derecho sobre la selección en la planilla de cálculo se puede crear una matriz, que *GeoGebra* nombrará como $m1$ en la vista algebraica.

El docente les hará notar que no es posible ir de Juan a Juan (o de cualquiera consigo mismo), porque uno mismo no se puede seguir. Es por ello que en la diagonal principal[27] de la matriz solo hay puros 0.

Ahora les hará calcular a los alumnos la matriz cuadrada de $m1$, que deberán comparar con la segunda tabla, donde se pregunta para cada uno cuántos se siguen de vuelta. Podrán notar que la diagonal coincide en ambos casos:

		Juan	Kiara	Lola	Mati	Nerea	
9							
10	Juan	2					
11	Kiara		1				
12	Lola			1			
13	Mati				2		
14	Nerea					0	
15							

$$m2 = m1^2$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.147: *GeoGebra* llama $m2$ a $m1^2$.

[27] Si es necesario el docente les recordará la definición de diagonal principal de una matriz

Por último les hará calcular $m1^3$que deberán comparar con la tercera de las tablas:

		Juan	Kiara	Lola	Mati	Nerea	
17							
18	Juan	1					
19	Kiara		1				
20	Lola			0			
21	Mati				2		
22	Nerea					2	
23							

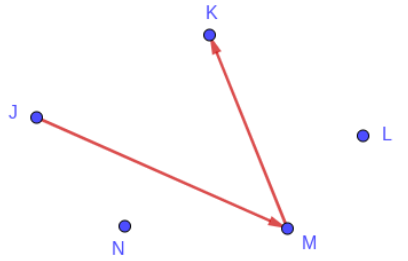
→

$$m3 = m1^3$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Figura 2.148: $m3$ es el cubo de la matriz inicial. También en esta ocasión coinciden las diagonales.

Es lógico que los alumnos se pregunten qué significan los números de la matriz que no están en la diagonal. El docente retomará la idea de que para confección de la segunda tabla los chicos buscaban el camino con dos flechas y para la tercera tabla el camino compuesto por tres flechas. Así por ejemplo, en el caso de $m1^2$ es posible ver que es posible llegar de Juan a Kiara usando dos flechas (pasando por Mati):



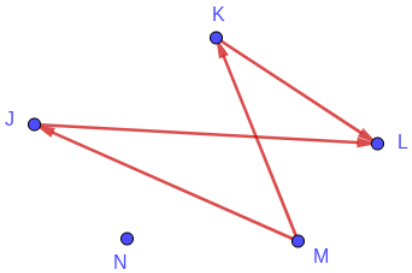
→

$$m2 = m1^2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.149: Desde Juan a Kiara solo es posible hacer un camino de dos flechas (flechas rojas) pasando por Mati. No hay otra opción posible.

En cambio, para ir de Mati a Lola solo hay dos caminos posibles:



→

$$m2 = m1^2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.150: En la matriz esos caminos se registraron en intersección de la cuarta fila con la tercera columna.

El docente promoverá que los alumnos encuentren todos los caminos de dos flechas, completando la segunda tabla y comparando con lo calculado para la matriz cuadrada.

A continuación se hará la comparación de la tercera tabla con $m1^3$, utilizando esta vez el criterio del camino de tres flechas entre un punto y otro. Contaremos como ejemplo los caminos posibles desde Mati hacia Juan, utilizando tres flechas:

- $M \to J \to M \to J$
- $M \to J \to L \to J$

- $M \to K \to M \to J$
- $M \to K \to L \to J$

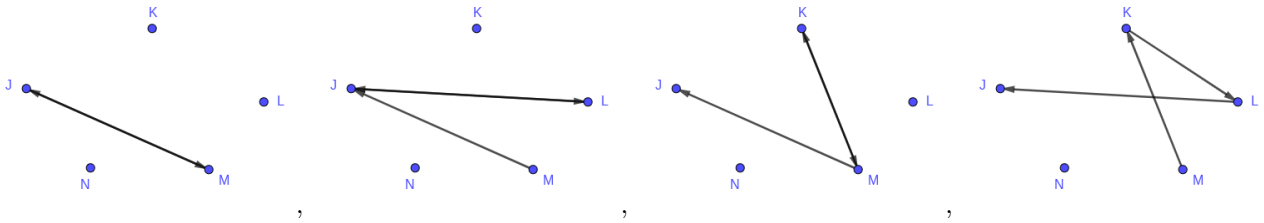


Figura 2.151: Quizás la última de las opciones es la que más sentido tiene porque no se repiten tramos sin embargo todas sirven para explicar cuántos caminos de tres flechas hay entre Mati y Juan. Es decir que son 4 las opciones disponibles, lo cual coincide con la intersección de la cuarta fila con la primer columna de la matriz $m1^3$.

El docente propondrá que los alumnos calculen todos los casilleros faltantes de la tercera tabla, ayudándose con el cálculo de la matriz cúbica. De esta forma se comprueba que esta matriz indica la cantidad de opciones disponibles entre un punto y otro utilizando 3 flechas.
Por último el docente indagará sobre la idea de la potencia de la matriz original y su relación con las flechas utilizadas en cada opción, aunque en el contexto del problema carezca de sentido preguntarse sobre el seguimiento repetido entre, por ejemplo, Mati y Juan... Se espera que los alumnos puedan abstraer la idea de que la matriz $m1^4$ indicará la cantidad de posibilidades de ir de un punto a otro utilizando exactamente 4 flechas, y así sucesivamente para las siguientes potencias.

Si es que a esta altura de la etapa de validación no se dio el caso, hará notar al alumnado que la matriz original $m1$ es $m1^1$, lo cual parece anecdótico, sin embargo explica el primer caso a la perfección.

Formalización

El docente formalizará en primer lugar el concepto de «grafo»:

> Un grafo es un conjunto de objetos llamados *vértices* o *nodos* unidos por *enlaces* llamados *aristas* o *arcos*, que permiten representar *relaciones binarias* entre elementos de un conjunto.

Los grafos pertenecen a una rama propia de la matemática que tiene infinidad de aplicaciones en las ciencias de la computación, transporte, logística, optimización de recorridos, procesos, flujos y algoritmos de búsqueda, entre otros.

El docente deberá hacer una aclaración pertinente del caso, para el problema trabajado se modelizó con un grafo orientado, es decir con flechas que indican el sentido de la relación. Sin embargo un grafo puede no tener una orientación determinada, es decir que cada enlace puede ser bidireccional, como una calle de doble mano.

También existen grafos ponderados, donde cada enlace no solo indica una relación entre pares de nodos, sino también algún otro atributo cuantitativo. Por ejemplo un grafo de ciudades y las rutas que las conectan es no orientado ya que las vías son de doble mano, y su ponderación podría ser la distancia de los tramos o el tiempo de viaje.

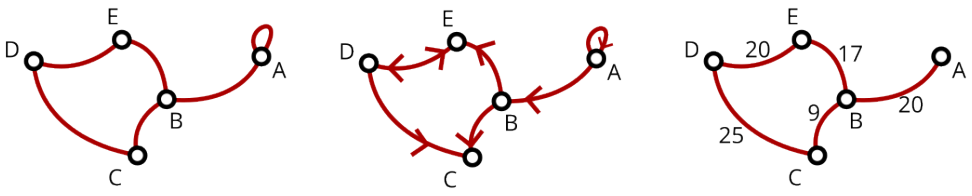


Figura 2.152: Distintos tipos de grafos.

Posteriormente definirá como «Matriz de adyacencia» a la surgida en la primera tabla del problema:

Una matriz de adyacencia es una matriz cuadrada que representa las conexiones entre los nodos de un grafo.

Se la define como una matriz $n \times n$, donde n es el número de nodos, en la cual un 1 en la posición (i, j) indica que hay una arista o conexión entre el nodo i y el nodo j, en tanto que un 0 indica que no hay conexión. En el caso de matrices ponderadas cada elemento de la matriz es numéricamente el valor de peso entre los nodos. Cuando el grafo no es orientado se da el caso de que la matriz de adyacencia es simétrica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 20 & 29 & 54 & 37 \\ 20 & 0 & 9 & 34 & 17 \\ 29 & 9 & 0 & 25 & 26 \\ 54 & 34 & 35 & 0 & 20 \\ 37 & 17 & 26 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, como se ha visto en la etapa de validación, al elevar la matriz de adyacencia a una potencia m determinada se determina la cantidad de caminos posibles entre un nodo y otro utilizando exactamente m enlaces.

La «Teoría de Grafos» es amplia y permite resolver problemas de optimización de redes. Por ejemplo, en lo que a transporte se refiere existe un proceso llamado «Algoritmo de Dijkstra» que, dado un grafo ponderado, encuentra el camino más corto desde un nodo de origen a todos los demás nodos del grafo. Funciona principalmente con grafos que tienen pesos en las aristas (costos, distancias, etc.) y no con pesos negativos. Es ampliamente utilizado en aplicaciones como la navegación (GPS) y el enrutamiento de paquetes en redes informáticas.

Capítulo 3

Geometría y magnitudes

3.1. Figuras planas

3.1.1. Construcción de triángulos

Nombre: Triángulos con palillos.

Resumen: Esta actividad propone, mediante la exploración y experimentación, una posible introducción a la propiedad triangular.

Objetivo: Reconocer la propiedad triangular en los lados de tres segmentos cualesquiera para que permitan formar un triángulo.

Saberes: Medidas.

Edad: 12 años.

Preparación Para la actividad se hace uso de herramientas geométricas como el círculo a modo de compás, puntos y segmentos. También se trabaja con segmentos de longitud fija. Es recomendable también trabajar esta actividad con elementos físicos de fácil manipulación, como palillos de madera o sorbetes de bebida con distintos tamaños.

Planteo

Con las siguientes ternas de números hay que tratar de armar triángulos, cada número es la longitud de un lado. Luego se deberán resolver las preguntas.

- $3, 5, 4$.
- $3, 5, 3$.
- $2, 5, 5$.
- $6, 1, 4$.
- $6, 1, 5$.

1. ¿Hay algún caso donde no pudiste armar un triángulo?
2. ¿Hay algún caso en los que «casi» logras armar un triángulo?
3. Propone un ejemplo, distinto a los dados, donde sea posible construir un triángulo.
4. Propone un ejemplo, distinto a los dados, donde no sea posible construir un triángulo.

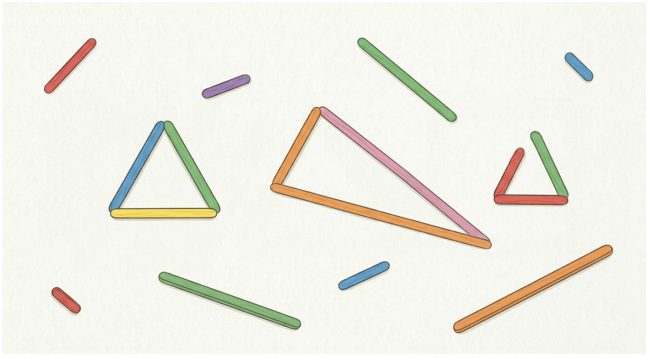


Figura 3.1: Triángulos armados con palillos de madera, a modo ilustrativo del planteo. Generada por Gemini IA y modificada por el autor.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema plantea armar 5 triángulos con distintas longitudes para sus lados.

2. *Pensar una estrategia*: Es posible que la primer estrategia sea intentar repetir métodos de papel y lápiz en *GeoGebra*, es decir dibujar un segmento y luego con el compás marcar arcos en cada extremo con las medidas de los otros dos y donde se de la intersección marcar el tercer vértice. Esto es emular la regla y el compás para conseguir los segmentos. Por ello el docente tendrá que estar atento a esta estrategia y asistir a los alumnos en cómo utilizar las herramientas disponibles en *GeoGebra*: «Segmento de longitud dada», «Compás» y «Circunferencia: centro y radio».
   Otra estrategia, si no se han dibujado anteriormente triángulos con regla y compás es encadenar segmentos de longitud fija en una poligonal abierta. Éstos pueden luego plegarse para intentar formar el triángulo.

3. *Ejecutar el plan:* Mostraremos las dos estrategias planteadas, para entender cómo puede darse la resolución del problema.
   La primera de ellas implica dibujar los tres segmentos (3, 4 y 5 unidades) y luego utilizar el compás para armar el triángulo.

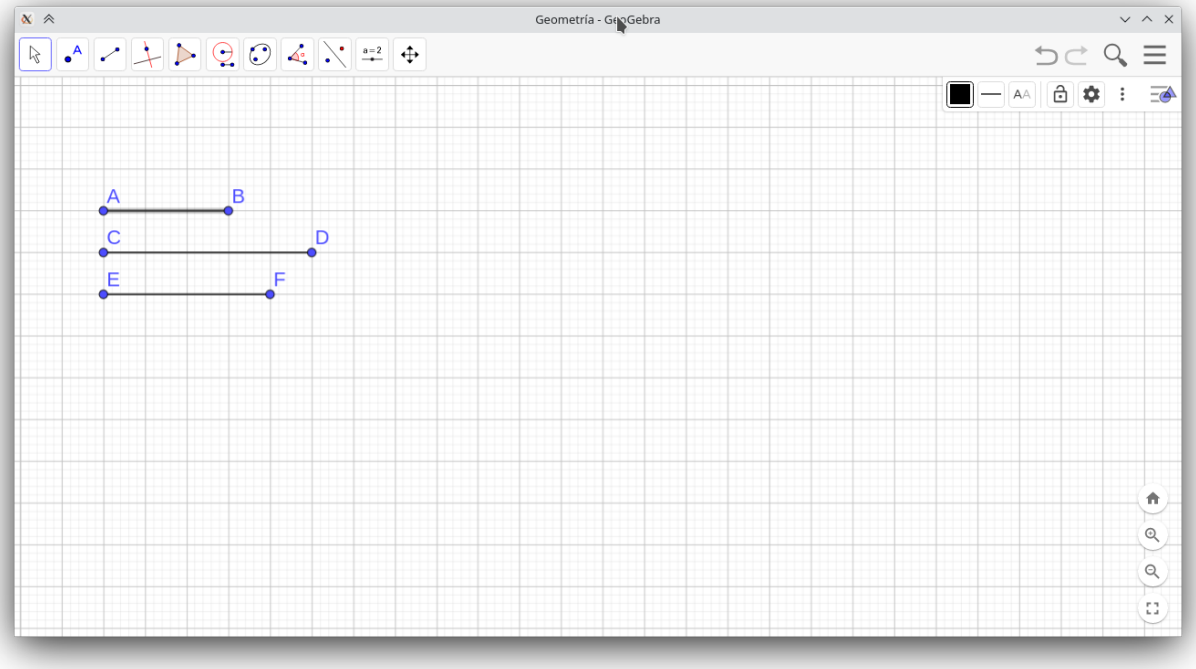


Figura 3.2: Se optó por utilizar la apariencia «Geometría» con la cuadrícula activada para que las medidas sean más fáciles de obtener.

Luego movemos el segmento $\overline{AB}$ al centro de la pantalla y utilizamos la herramienta «Compás» para generar los arcos con las medidas de los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.

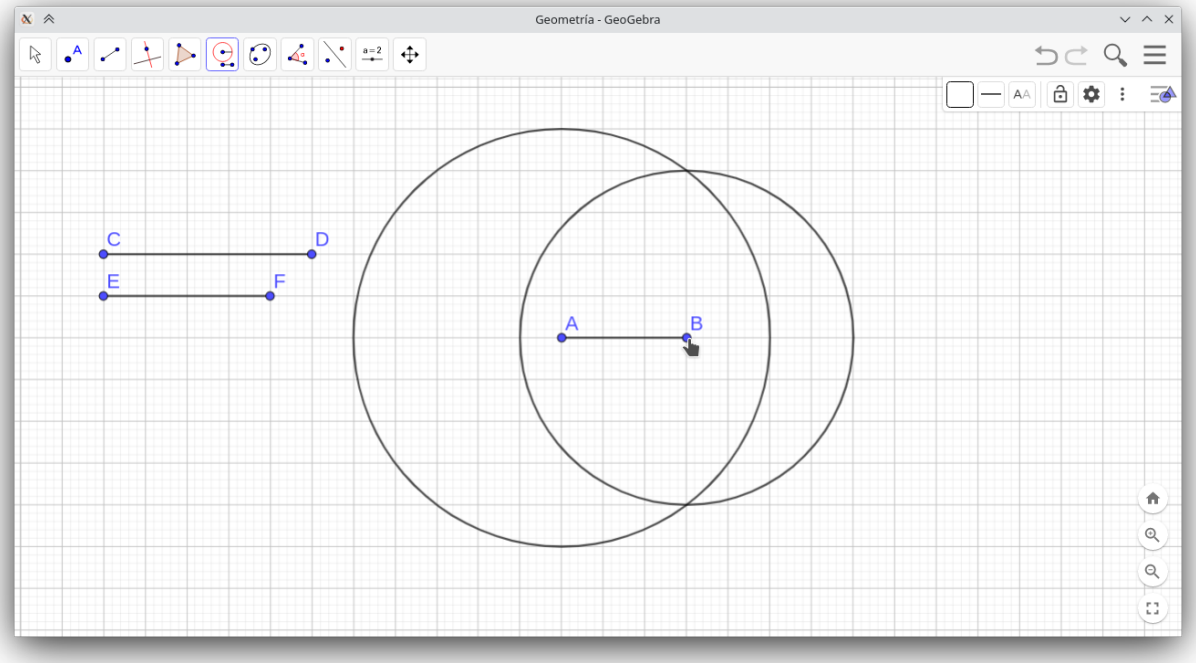


Figura 3.3: La herramienta compás genera círculos completos, a diferencia de un compás real donde se lo usa para marcar arcos.

Por último hay que unir la intersección entre los círculos para obtener el tercer vértice.

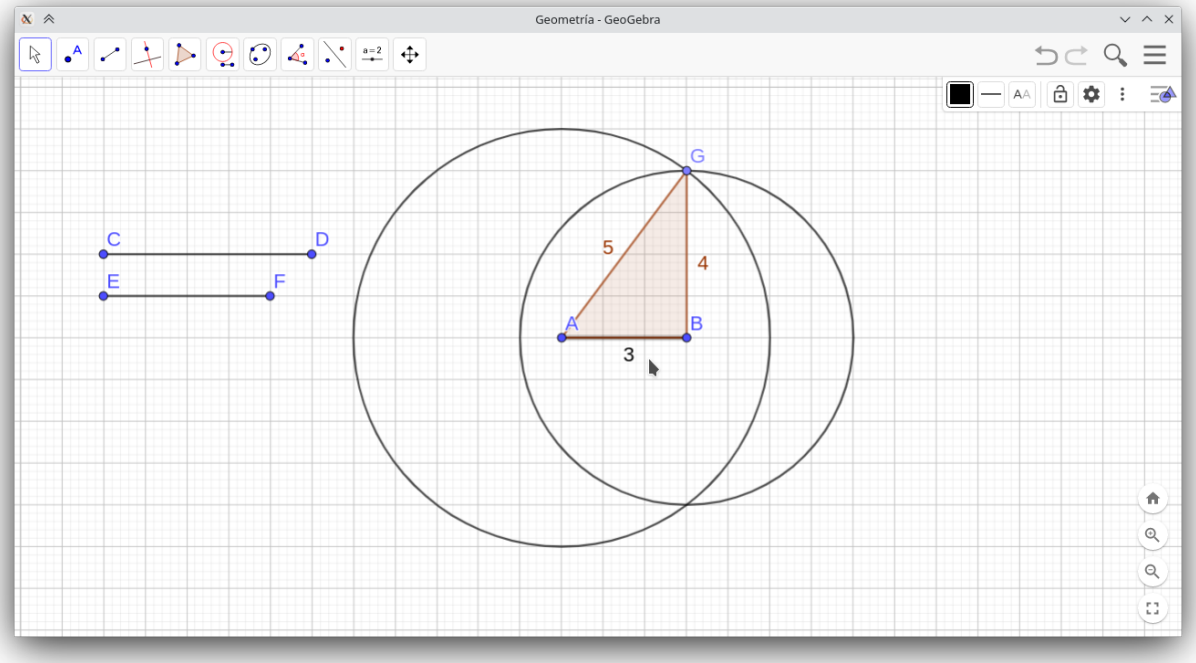


Figura 3.4: Para finalizar la construcción del triángulo se utilizó la herramienta «Polígono» y además se etiquetaron los lados del triángulo con los valores correspondientes.

El primer caso ha sido resuelto. Vemos que se forma un triángulo perfectamente. Analizaremos los siguientes casos, siguiendo los mismos pasos de construcción o reutilizando el mismo archivo.

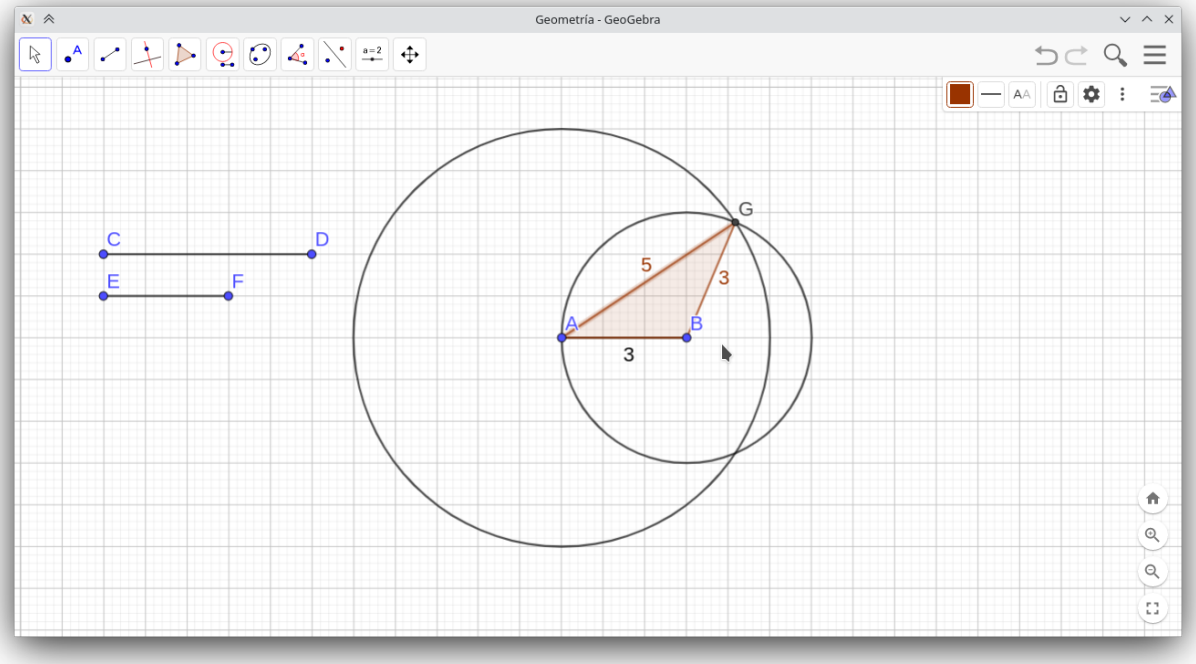


Figura 3.5: El segundo caso con las medidas $3, 5, 3$ también pudo resolverse.

El tercer caso también tiene resolución:

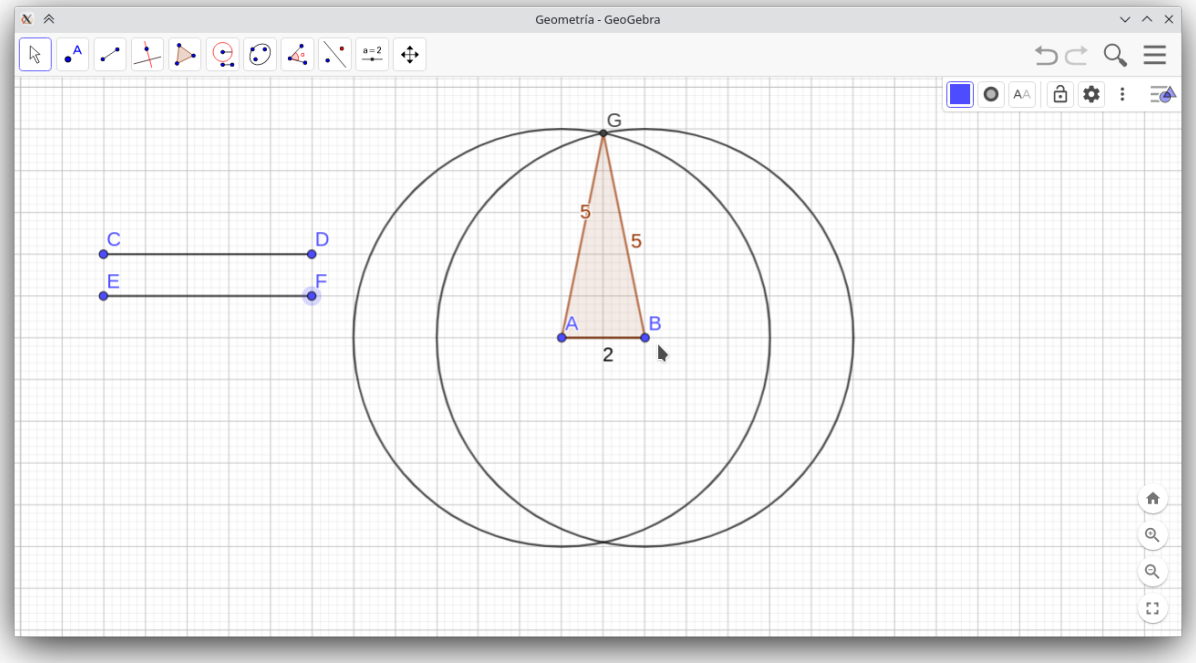


Figura 3.6: También aquí se ha logrado construir un triangulo.

Veamos qué sucede en los próximos casos:

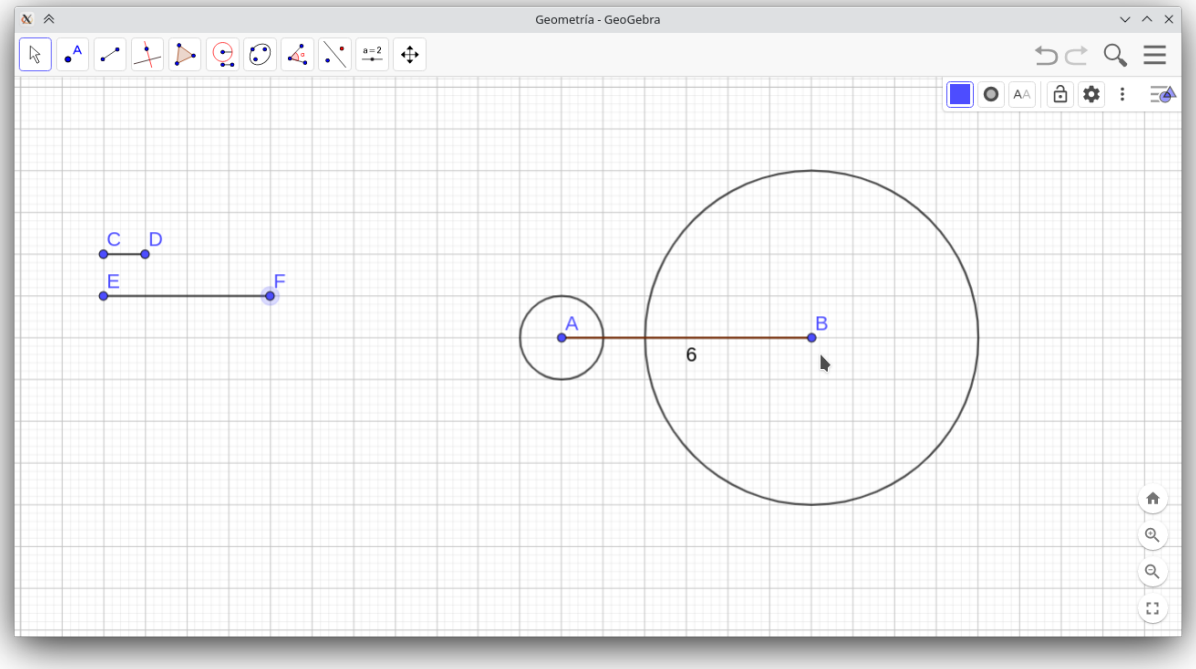


Figura 3.7: Con la cuarta terna $6, 1, 4$ no se ha podido armar un triángulo ya que no existe intersección entre las circunferencias.

El último caso tampoco puede resolverse, aunque las circunferencias tienen un punto de intersección:

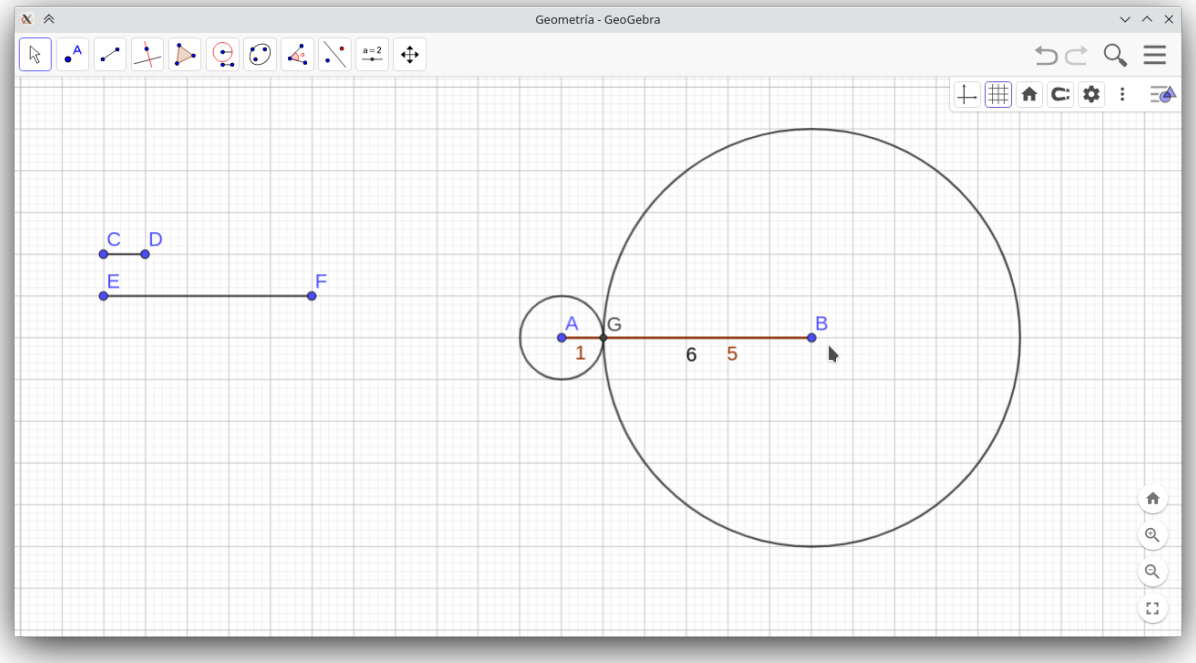


Figura 3.8: No logra formarse un triángulo en este último caso.

Podemos responder las preguntas:

¿Hay algún caso donde no pudiste armar un triángulo? Si, efectivamente en los dos últimos casos no se pudo armar el triángulo.
¿Hay algún caso en los que «casi» logras armar un triángulo? En el último caso, hay una intersección entre los arcos del compás generando una especie de triángulo chato o aplastado.
Propone un ejemplo, distinto a los dados, donde sea posible construir un triángulo. Pueden darse múltiples ternas, como por ejemplo $2, 3, 4$ o $3, 3, 3$.
Propone un ejemplo, distinto a los dados, donde no sea posible construir un triángulo. También aquí pueden darse variadas respuestas que serán similares a los casos 4 y 5, como $6, 1, 3$ o $3, 2, 1$.

4. *Verificar y repensar la solución.* Nos quedó pendiente utilizar la estrategia de la poligonal, por ello repasaremos a continuación cómo puede resolverse y qué dificultades pueden llegar a darse.
La estrategia de la poligonal permite pensar al triángulo como tres segmentos consecutivos articulados, pero con los extremos «sueltos». Es una estrategia que suele emplearse en propuestas similares a ésta, pero con palitos o tiras de cartulina y algún dispositivo o broche que permita la articulación entre ellos. En *GeoGebra* podemos armarlo utilizando la herramienta «Segmento de longitud dada»:

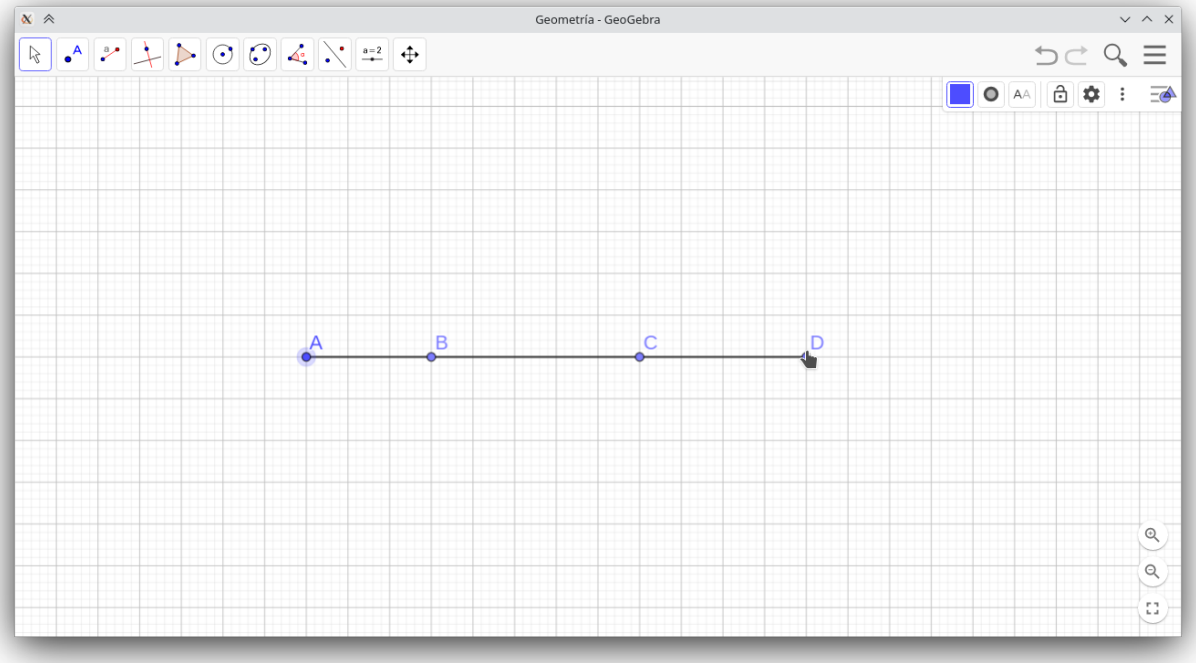


Figura 3.9: Poligonal armada con segmentos de longitud fija.

Quienes trabajen esta estrategia podrán explorar el armado de cada triángulo moviendo los puntos, sabiendo que cada segmento es dependiente del anterior:

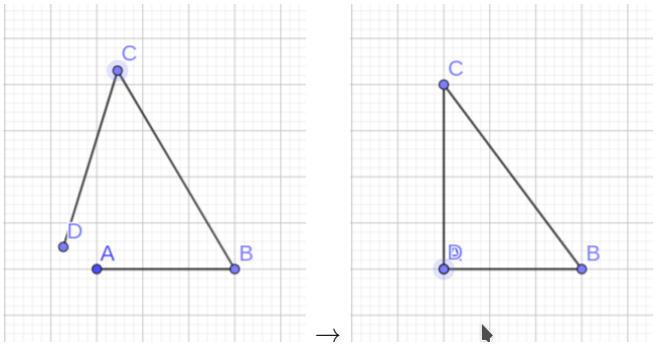


Figura 3.10: En este caso los vértices del triángulo coinciden con la cuadrícula.

En el cuarto caso $(6, 1, 4)$ se hace visible la imposibilidad de cerrar los segmentos para armar el triángulo:

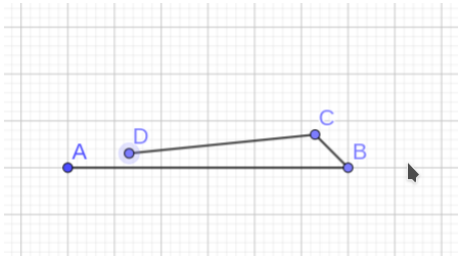


Figura 3.11: Se llega a la misma conclusión que con la estrategia del compás, no es posible armar el triángulo.

En ambas estrategias hemos considerado que los alumnos toman valores enteros para los lados, sin embargo es posible que algún alumno intente trabajar con valores decimales.
También será interesante exponer entre los alumnos las ternas que armaron para las condiciones que sea posible armar triángulos y en los que no sea posible.

Validación

El docente guiará a los alumnos hacia un razonamiento que permita determinar cuándo es posible armar un triángulo con tres medidas de segmento y cuándo no es posible. Posiblemente argumentarán que es imposible cuando hay un lado que es más largo (o igual) que la suma de los otros dos pero les resulte más difícil describir cuándo es posible.

Quizás sea una buena idea exponer en el pizarrón la comparación de la sumas de dos números de la terna con el tercer número, por ejemplo para el primer caso:

- «$3 + 5 = 8$» versus «4»,
- «$5 + 4 = 9$» versus «3» y
- «$3 + 4 = 7$» versus «5».

En todos estos casos el lado restante es menor que la suma de los otros dos.

También habrá que exponer la diferencia entre dos números comparado con el tercero de la terna, ya que esa diferencia es precisamente el sobrante que permite articular los «palitos» y armar el triángulo:

- «$5 - 3 = 2$» versus «4»,
- «$5 - 4 = 1$» versus «3» y
- «$4 - 3 = 1$» versus «5»

Formalización

El docente propondrá entonces la institucionalización de los conceptos aprendidos, por un lado la «propiedad triangular» que dice que para que todo triángulo pueda construirse es necesario que la longitud de cada lado sea menor que la suma de los otros dos y que sea mayor a su diferencia.

Luego se podrá proponer alguna actividad de fijación donde se propongan ternas de números y los alumnos indiquen si es o no posible armar los triángulos.

La finalización de esta actividad también nos brinda una buena oportunidad para explorar las «formas» de los triángulos que pudieron armarse, y de esta manera formalizar la clasificación de los triángulos según sus lados y ángulos, aprovechando las herramientas que posee *GeoGebra* en la medición y etiquetado.

3.1.2. Áreas de cuadriláteros

Nombre: Escudos y estandartes.

Resumen: La secuencia didáctica plantea un problema realista, la elaboración de escudos para la escuela, y con ello la construcción de las fórmulas de las áreas del *paralelogramo*, el *trapecio* y el *rombo*.

Objetivo: Construir las fórmulas de área correspondientes al *paralelogramo*, el *trapecio* y el *rombo* a partir de la fórmula de área del rectángulo.

Saberes: Clasificación de cuadriláteros. Área del cuadrado, rectángulo y triángulo.

Edad: 13 años.

Preparación Esta actividad se sugiere como una continuidad luego de la clasificación de los cuadriláteros. Se recomienda un manejo básico de las herramientas geométricas para validar los resultados de área obtenidos, en particular de la herramienta «Polígono». En algún momento será necesario modificar y adaptar la cuadrícula y distancia entre unidades mostradas desde el panel de propiedades de vista gráfica.

Planteo

En el Centro de Estudiantes de la escuela se propone la idea de crear un escudo o estandarte que sirva como símbolo para representar al colegio en las actividades y competencias en las que participan junto a otros institutos educativos. Para ello organizan un concurso donde elegirán entre todos el que más les guste a todos.

Los alumnos de segundo año presentan tres modelos distintos para concursar. Para hacer más sencilla su construcción elijen medidas según los materiales y maderas que tienen disponibles. Pero la cuestión se complica cuando tienen que pintarlos con base roja (que es uno de los colores principales de la institución), porque deben calcular cuánta pintura acrílica necesitarán comprar en la ferretería ya que cada pote de $200cc$ rinde $2m^2$.

Las formas y medidas elegidas son las siguientes: Un paralelogramo[1], un *trapecio (isósceles)* y un *rombo*[2] respectivamente:

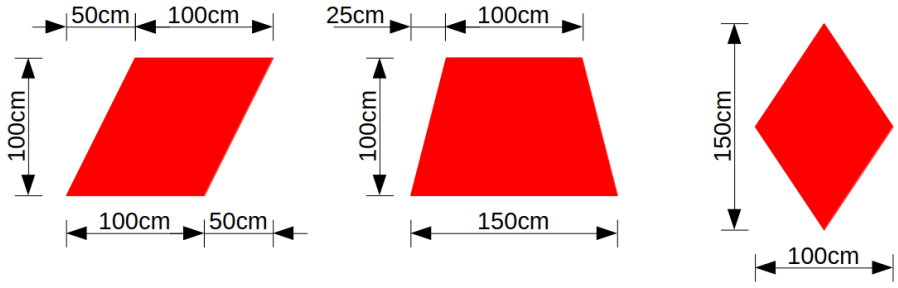


Figura 3.12: Los tres modelos de escudos que diseñaron los alumnos, pintados con acrílico rojo.

¿Cuántos potes de pintura roja tendrán que pedir en la ferretería si solo quieren pintar cada escudo de un solo lado?

[1]En algunos libros y sitos de internet se define a esta figura como *romboide*. Sin embargo algunos libros, como *Geometría del plano y del espacio* de *Graciela Garguichevich* (UNR Editora), definen al *romboide* como «un *trapezoide* que tiene un par de vértices opuestos equidistantes del otro par», y que previamente define al *trapezoide* como «todo cuadrilátero que no tiene lados paralelos». En esta secuencia nos interesa trabajar con las características del *paralelogramo*, por ello lo utilizamos este nombre de forma particular.

Es interesante el artículo «La definición y clasificación de cuadriláteros en los libros de texto de ayer y de hoy» de Mario Dalcín, donde presenta un breve análisis sobre el tema (ver enlace).

[2]Que también es un tipo de *paralelogramo*.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema solicita calcular cuántos potes de pintura acrílica de color rojo se necesitarán para pintar los tres modelos de escudos que pensaron los alumnos de segundo año del colegio. Cada pote de $200cc$ rinde $2m^2$ (o $20000cm^2$ ya que $2m^2 = 2\times 1m^2 = 2\times(1m\times 1m) = 2\times(100cm\times 100cm) = 2\times 10000cm^2 = 20000cm^2$[3]), y para cada figura se tienen las medidas exactas que sirven para construirlos. De alguna manera hay que averiguar el área total a pintar y luego comprar los potes necesarios, pensando en que quizás sobre pintura.
   En esta etapa el docente se asegurará de que los alumnos conocen la definición del *paralelogramo*, el *trapecio isósceles* y el *rombo*. También preguntará si pueden reconocer bases, alturas y diagonales para cada figura con el fin de descubrir si existen errores conceptuales que luego puedan dificultar la resolución de la actividad, como por ejemplo confundir la altura del paralelogramo con uno de los lados inclinados. Podrá incluso avanzar un poco más e indagar si recuerdan alguna de las propiedades básicas de estos cuadriláteros; como la congruencia entre lados, diagonales y ángulos de cada uno de ellos. Algunas de estas propiedades serán necesarias para validar, luego, algunos procesos en la resolución.

2. *Pensar una estrategia*: El docente podrá armar distintos grupos y les asignará a cada uno de ellos una figura distinta para que intenten pensar en cómo calcular su área. Será incluso mejor si puede armar 6 o 9 grupos, de forma que se repitan las figuras. Los dejará pensar el problema por 5 minutos y luego hará algunas indagaciones para saber si tienen en claro qué herramientas conocen para el cálculo del área. Según las premisas de contenidos se supone que los alumnos conocen el área del cuadrado y del rectángulo, $lado \times lado$ para el primero y $base \times altura$ para el segundo. También conocen el área del triángulo, $\frac{base\times altura}{2}$.
   El docente podrá hacerles reflexionar sobre la naturaleza de estas fórmulas: Algunos sabrán también que el cuadrado es en realidad un rectángulo regular, por lo que su fórmula es en esencia la misma. Y también podrán conocer que la fórmula del triángulo deriva del rectángulo, ya que puede calcularse como la mitad de su área dividiendo precisamente esta figura en dos por una de sus diagonales. Por supuesto que también podrá preguntarles por algunas propiedades conocidas de los cuadriláteros, que quizás utilicen luego en el desarrollo de las estrategias.
   Esta idea de descomponer una figura en partes debería resultar en la principal estrategia. Es decir, partir una figura de forma que les queden formas geométricas con las que puedan luego calcular el área: cuadrado, rectángulo y triángulo. La premisa intuitiva y lógica detrás de esta idea es que el total equivale a la suma de todas sus partes.

3. *Ejecutar el plan*: Cada grupo trabajará en la figura que le tocó, pensando en cómo dividir cada figura en otras conocidas. Podrán trabajar con regla y lápiz en papel, pero en nuestro caso proponemos utilizar directamente *GeoGebra*, con la cuadrícula y ejes activos desde la apariencia de «Geometría»[4].
   Podemos suponer que para el paralelogramo los alumnos intentarán distintas estrategias de partición:

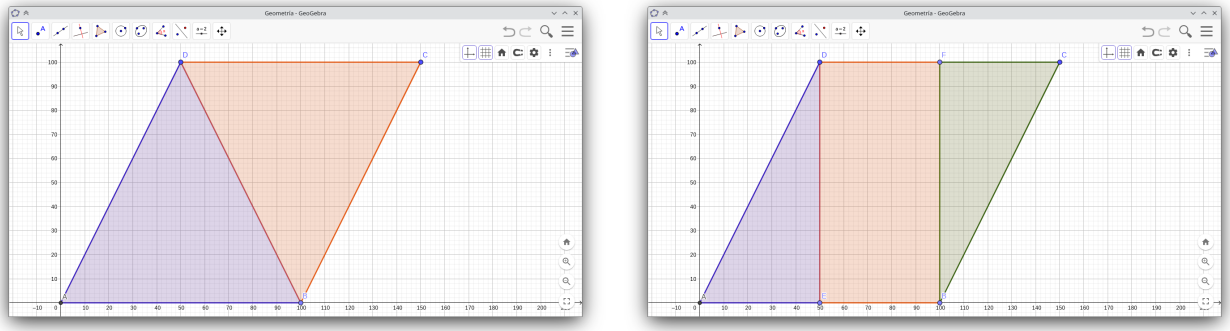


Figura 3.13: Dos formas posibles de dividir el paralelogramo en varias partes.

La primera de las opciones muestra cómo dividir el paralelogramo en dos triángulos congruentes de base

[3]En este caso se optó por realizar el pasaje a cm^2 mediante la operación de multiplicación como área, pero puede utilizarse la conversión directa si se quiere. Esta conversión es necesaria para poder comparar luego los resultados.

[4]Los ejes servirán como «reglas», y la grilla se utilizará para que los puntos se magneticen correctamente a las coordenadas enteras.

$100cm$ y altura $100cm$ cada uno. Luego, el área se consigue con la fórmula del área del triángulo duplicada (o sumada dos veces ya que es el mismo cálculo para cada triángulo):
$A_t = 2\blacktriangle = 2 \times \frac{100cm \times 100cm}{2} = 10000cm^2$
La segunda opción divide el paralelogramo en tres partes, dos triángulos rectángulos congruentes y un rectángulo en el medio. Todos tienen $50cm$ de base y $100cm$ de altura, por lo que el área total se calcula así:
$A_t = 2\blacktriangle + \blacksquare = 2 \times \frac{50cm \times 100cm}{2} + 50cm \times 100cm = 5000cm^2 + 5000cm^2 = 10000cm^2$
Ambos cálculos llegan al mismo número.
También es posible que algún grupo piense en «recortar y rearmar» el paralelogramo para que tome la forma de una figura cuya fórmula conoce: el cuadrado.

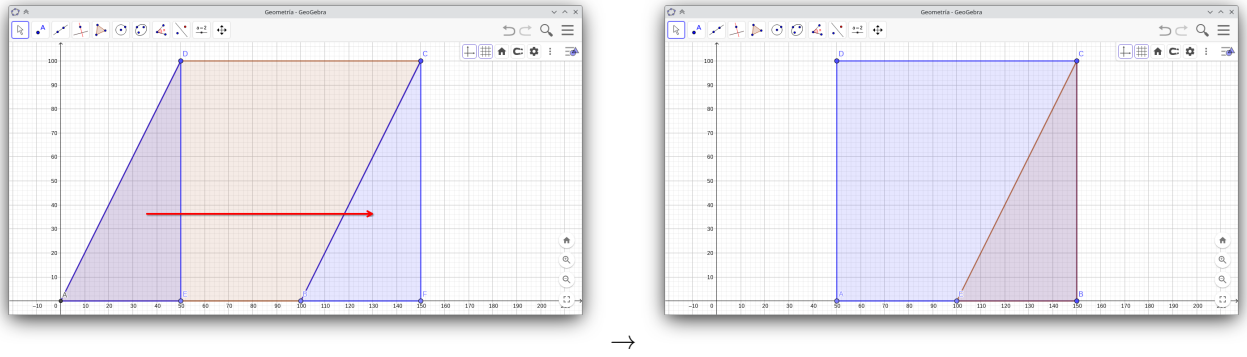


Figura 3.14: En este caso se recortó el triángulo del lado izquierdo y se lo desplazó hacia el lado derecho, quedando entonces un cuadrado de $100cm$ de lado.

Para calcular simplemente se aplica la fórmula del área del cuadrado:
$A_t = \blacksquare = (100cm)^2 = 10000cm^2$
Por lo visto, las tres formas de cálculo de área coinciden, y si se compara con el tarro de pintura acrílica se necesitaría medio pote para pintar este escudo.

El segundo de los escudos, el que tiene forma de trapecio, puede trabajarse de forma similar a éste dividiéndolo en figuras ya conocidas[5]. Por ejemplo:

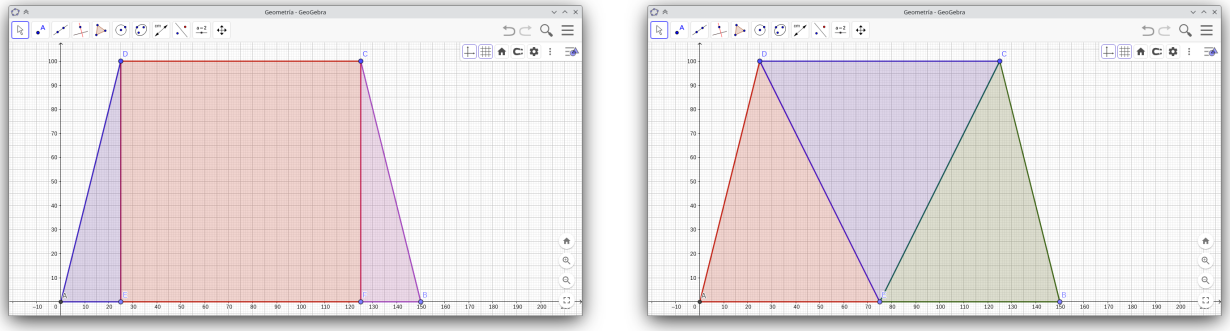


Figura 3.15: Dos formas diferentes de dividir el trapecio.

La primera de las formas implica dividir el trapecio en un cuadrado central de $100cm$ de lado y dos triángulos congruentes de $25cm$ de base y $100cm$ de altura cada uno. En el segundo caso se forman tres triángulos: el central tiene la base (arriba) y su altura de $100cm$, los dos triángulos laterales son congruentes y tienen $75cm$ de base con $100cm$ de altura cada uno.
Para el primero de los casos: $A_t = \blacksquare + 2\blacktriangle = (100cm)^2 + 2 \times \frac{25cm \times 100cm}{2} = 10000cm^2 + 2500cm^2 = 12500cm^2$;

[5]Es necesario aclarar que para este caso se utilizó una grilla más refinada, con paso de 5 en 5 para que los puntos puedan magnetizarse en múltiplos de 5.

En tanto el segundo: $A_t = \blacktriangledown + 2\blacktriangle = \frac{100cm \times 100cm}{2} + 2 \times \frac{75cm \times 100cm}{2} = 5000cm^2 + 7500cm^2 = 12500cm^2$
Otra forma de pensar el área es recortar y reordenar para lograr una figura conocida, como el rectángulo:

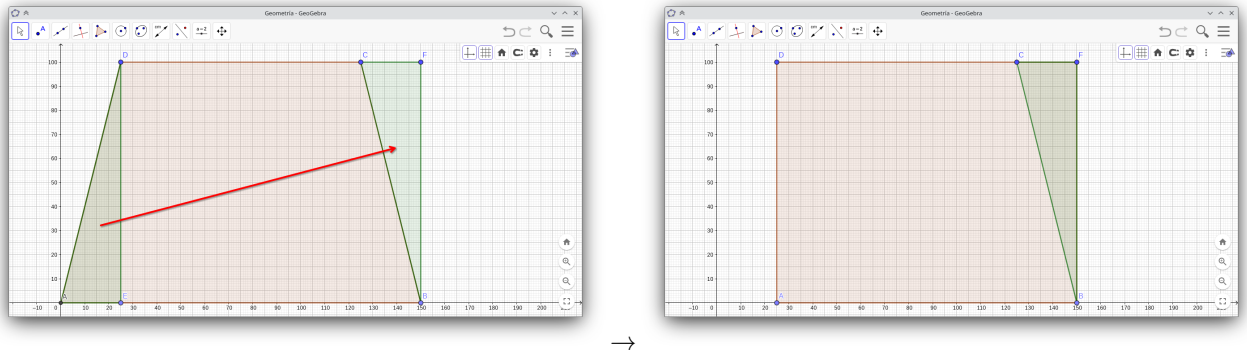


Figura 3.16: El trapecio se convierte en un rectángulo.

Para calcular el área hacemos entonces:
$A_t = \blacksquare = 125cm \times 100cm = 12500cm^2$
También en este caso las tres formas de calcular el área coinciden, y en comparación con el pote de pintura se necesita un poco más de la mitad del frasco para pintar este escudo con forma trapezoidal.

Por último, el escudo «rombo» puede ser calculado como cuatro triángulos congruentes si se lo divide por sus diagonales, o dos triángulos si se lo divide por una de sus diagonales (cualquiera de ellas, pero en este caso es la menor):

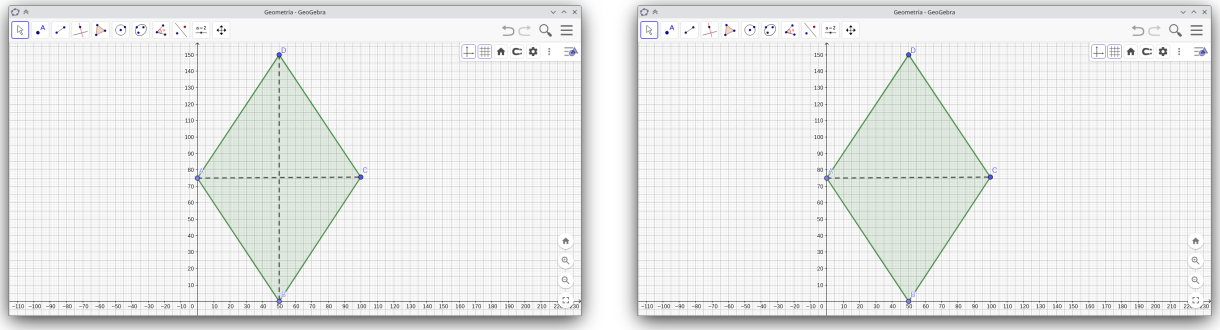


Figura 3.17: El rombo se puede dividir en 4 triángulos o 2 triángulos.

Para el primer caso cálculo entonces queda: $A_t = 4\blacktriangle = 4 \times \frac{50cm \times 75cm}{2} = 7500cm^2$
Para el segundo: $A_t = 2\blacktriangle = 2 \times \frac{100cm \times 75cm}{2} = 7500cm$
También, para el rombo es posible pensar un método de recorte y ordenamiento de piezas. Así, recortando por las diagonales podemos llegar al rectángulo.

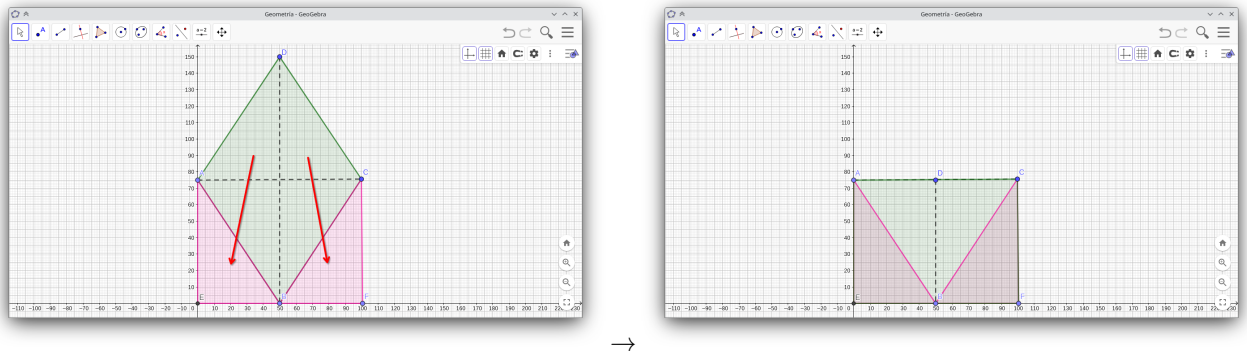


Figura 3.18: El rombo se transforma en un rectángulo.

El rectángulo tiene $100cm$ de base y $75cm$ de altura, por lo tanto: $A_t = \blacksquare = 100cm \times 75cm = 7500cm^2$
En este caso, entonces, se necesita menos de la mitad de un pote para pintar el escudo.

4. *Verificar y repensar la solución*: Si la actividad se trabajó en grupos, entonces ahora es el momento de exponer las producciones a todo el conjunto de alumnos. La comparativas entre los grupos respecto al cálculo del área de cada escudo dará cuenta si el resultado es correcto o no. Para reforzar el docente podrá hacerles comparar con los resultados que ofrece directamente *GeoGebra*[6]:

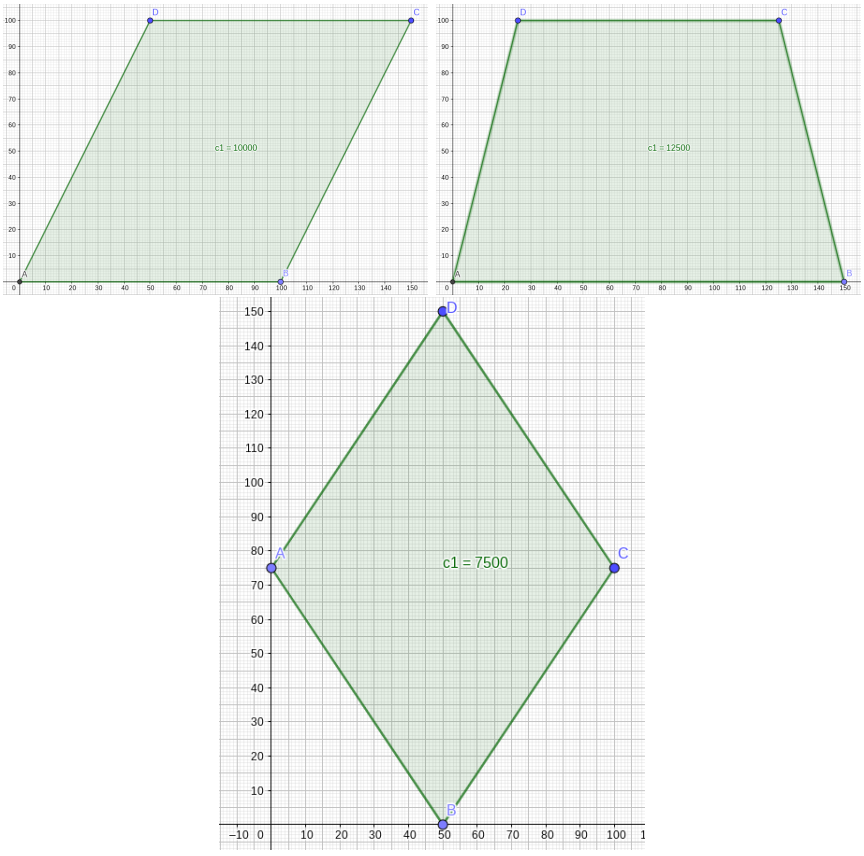


Figura 3.19: Los valores de área de cada figura se calculan de forma automática.

Resta calcular cuántos potes son necesarios en total si decidimos compartir la pintura entre todos los grupos que participan de la construcción de los escudos: $10000cm^2 + 12500cm^2 + 7500cm^2 = 30000cm^2$, entonces se necesitarán comprar al menos 2 potes de pintura, y sobrará media lata.

[6]Para ello solo hay que activar la etiqueta «Valor» o «Nombre y valor»

Validación

La etapa de validación consistirá en que el docente logre llevar al alumnado desde lo particular a lo general, es decir, partiendo desde los cálculos realizados por los alumnos para el cálculo de áreas a las fórmulas generales que luego se formalizarán en la siguiente etapa.

Para el paralelogramo tomaremos el primer cálculo que habla de dividir la figura en dos triángulos:

$A_t = 2\blacktriangle = 2 \times \frac{base \times altura}{2} = base \times altura$

Por lo cual la fórmula termina siendo igual al del paralelogramo. Esto lo podemos demostrar gráficamente[7] para cualquier paralelogramo con la siguiente secuencia:

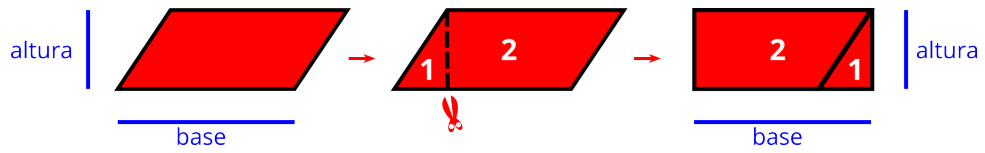


Figura 3.20: Dado un paralelogramo, se recorta un triángulo rectángulo lateral desde el vértice superior izquierdo. Luego se lo une del lado derecho formando un rectángulo de igual base y altura que la figura original.

Por lo tanto, siendo que bases y alturas coinciden en valor podemos afirmar que la fórmula del área del paralelogramo es: $A = base \times altura$

En tanto, para el trapecio el docente los guiará por un nuevo cálculo gráfico[8] que luego derivará en la fórmula general. Para ello dividirá el trapecio en dos triángulos por una de sus diagonales y luego, mediante algunas transformaciones[9] los llevará hacia la fórmula general del área del trapecio.

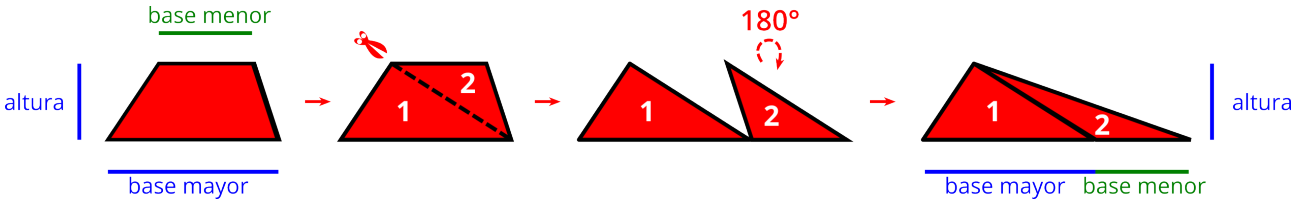


Figura 3.21: Partiendo en dos el trapecio se generan dos triángulos, 1 y 2. Al segundo se lo gira y coloca haciendo coincidir base con base por un vértice, sin que se solapen. Luego, sabiendo que todos los triángulos de igual base y altura poseen el mismo valor de área se desplaza de forma paralela a la base el vértice superior del triángulo 2 para que coincida con el vértice superior del triángulo 1.

Con estas transformaciones pasamos de un trapecio a un triángulo cuya altura es la misma, y su base es la suma de la base mayor con la base menor. La fórmula del área del trapecio queda entonces: $A = \frac{(basemayor + basemenor) \times altura}{2}$

Podemos comprobarlo comparando el resultado del escudo con forma de trapecio ya calculado ($12500cm^2$):

$A = \frac{(150cm + 100cm) \times 100cm}{2} = \frac{250cm \times 100cm}{2} = \frac{25000cm^2}{2} = 12500cm^2$

Por último, y también de forma gráfica, buscaremos una fórmula para el área del rombo utilizando los datos conocidos, es decir, sus diagonales[10]:

[7] Es sabido que una gráfica no es estrictamente una demostración, sin embargo nos permite inferir la fórmula de una forma muy intuitiva. El docente podrá, opcionalmente desarrollar los pasos algebraicos necesarios para llegar a la fórmula. En nuestro caso no lo consideramos necesario.

[8] Esta forma de cálculo también podría haber surgido como estrategia en la etapa de «Resolución».

[9] A decir verdad las transformaciones de figuras planas son necesarias para desarrollar esta idea, sin embargo aquí lo usamos de una forma muy intuitiva, como si fuera un juego de recortar y pegar.

[10] También en este caso se podría haber implementado esta estrategia para resolver el área del escudo en la etapa de «Resolución». Hay que tener en cuenta que puedenexistir múltiples variantes y todas serán válidas, solo que en este caso se elije esta estrategia porque nos lleva directamente a la fórmula estándar del área del rombo.

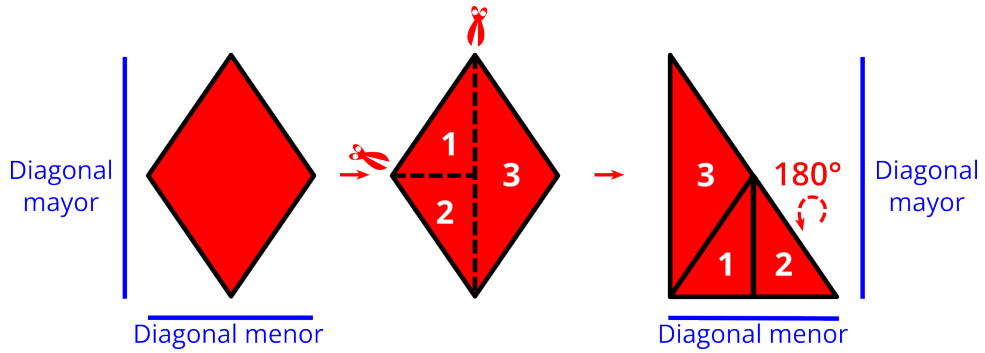


Figura 3.22: Si dividimos el rombo en tres partes y luego reubicamos las piezas obtenemos un triángulo con base igual a la diagonal menor, y altura igual a la diagonal mayor.

Del esquema observamos que el rombo es ahora un triángulo, por lo tanto la fórmula del área queda: $A = \frac{DiagonalMayor \times DiagonalMenor}{2}$.

Podemos verificar que funciona, efectivamente si comparamos con lo resuelto anteriormente para este escudo: $A = \frac{100cm \times 150cm}{2} = \frac{15000cm^2}{2} = 7500cm^2$

Formalización

Las fórmulas construidas en la etapa de «Validación» son las que se utilizan de forma estandarizada para estos tres cuadriláteros, a saber:

- Paralelogramo:$A = base \times altura$
- Trapecio[11]: $A = \frac{(basemayor + basemenor) \times altura}{2}$
- Rombo: $A = \frac{DiagonalMayor \times DiagonalMenor}{2}$

El docente podrá hacerles construir láminas con la familia de cuadriláteros, sus descripciones y propiedades, sus respectivas fórmulas de área e incluso con el cálculo del perímetro. Verán además que hay otros cuadriláteros para los cuales no poseen fórmulas de área (el *deltoide*, por ejemplo, como el clásico «barrilete»), pero que ellos podrán intentar construir siguiendo la misma lógica que la trabajada en la etapa anterior.

[11] No solo el trapecio isósceles, como en el problema, sino cualquiera.

3.1.3. Área versus perímetro

Nombre: Armando porta retratos.

Resumen: A partir de un problema con retratos con forma de rectángulo se pensó esta actividad donde se trabaja la relación entre áreas y perímetros de figuras planas.

Objetivo: Reconocer la independencia relacional entre área y perímetro en figuras geométricas semejante.

Saberes: Cálculo de área y perímetro, Proporcionalidad, Función lineal, Función cuadrática.

Edad: 15 a 17 años.

Preparación Una de las herramientas más destacadas de esta secuencia es el uso del «Rastro» de un punto como «lugar geométrico». También se hace uso de deslizadores y se complementa el trabajo geométrico de la vista gráfica con la algebraica.

Planteo

Ana y Mateo están armando unos porta retratos hechos de cartulina de base, cinta decorativa como marco y un vidrio. Deciden armarlos de distintos tamaños proporcionales y se ponen de acuerdo para utilizar formato de $9x13cm$, $18x26cm$ (doble lado) y $27x39cm$ (triple lado). Toman las cartulinas y arman la primer muestra, de $9x13cm$ y se ponen a calcular el *perímetro* para el marco y el *área* para saber el costo del vidrio que le colocarán.

Pero al momento de calcular los materiales necesarios no se pueden poner de acuerdo, Ana dice que si el un tamaño de los lados es del doble, entonces el *perímetro* de los marcos también se duplica y por lo tanto el *área* también. Mateo no esta convencido y dice que hay que hacer pruebas y calcular.

¿Puedes ayudarlos a resolver este dilema?

Figura 3.23: Imagen ilustrativa del problema de Ana y Mateo. Generada por Gemini IA y modificada por el autor.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: Los datos indican dimensiones de cada rectángulo, donde los lados son proporcionales en factor 1, 2 y 3. Se pide calcular *áreas* y *perímetros* para las distintas medidas de rectángulos (retratos).

2. *Pensar una estrategia*: Se pueden utilizar esas medidas para dibujar en *GeoGebra*, calcular *perímetro* y *área* de cada figura y luego comparar resultados. Así se sabrá si al duplicar las medidas de los rectángulos también lo hacen el *perímetro* y *área*.

3. *Ejecutar el plan*: En *GeoGebra*, se utiliza la herramienta de polígono para armar los tres rectángulos.

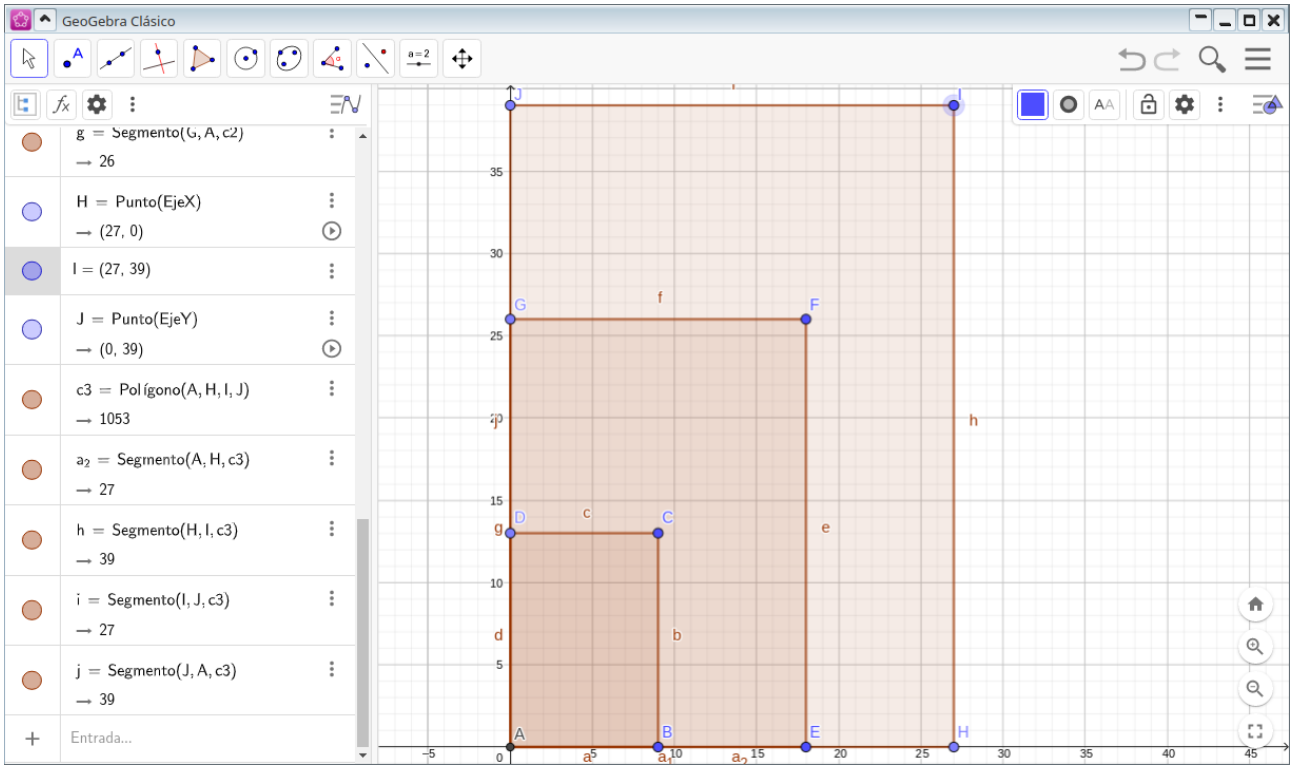


Figura 3.24: Representación de los porta retratos

Con los comandos "*Área*()" y "*Perímetro*()" se obtienen los valores correspondientes buscados. Para facilitar los cálculos se renombraron los polígonos como "chico", "mediano" y "grande".

Figura 3.25: *Áreas* y *perímetros* de los tres rectángulos

Solo resta calcular las relaciones entre *perímetros* y *áreas* entre sí y determinar si existe o no proporcionalidad entre ellos.

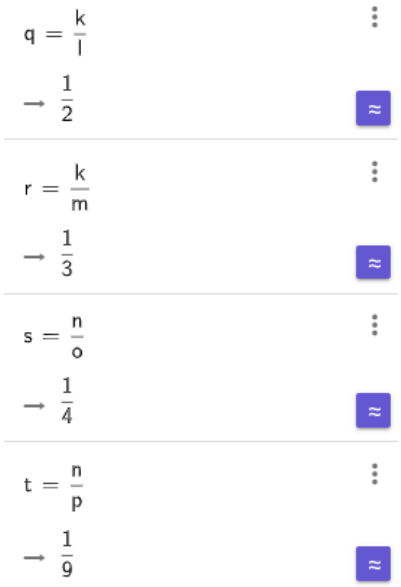


Figura 3.26: Cocientes entre *perímetros* y entre *áreas*.

Las relaciones entre los *perímetros* demuestran que existe una proporcionalidad de 1, 2 y 3 veces, pero con las *áreas* no sucede lo mismo, ya que las relaciones dan 1, 4 y 9 respectivamente.

4. *Verificar y repensar la solución*: Al comparar visualmente los rectángulos vemos que si bien los lados son proporcionales en 1, 2 y 3 veces, el rectángulo chico entra cuatro veces en el rectángulo mediano, y 9 veces en el grande. Por lo tanto, Ana no tenía razón.

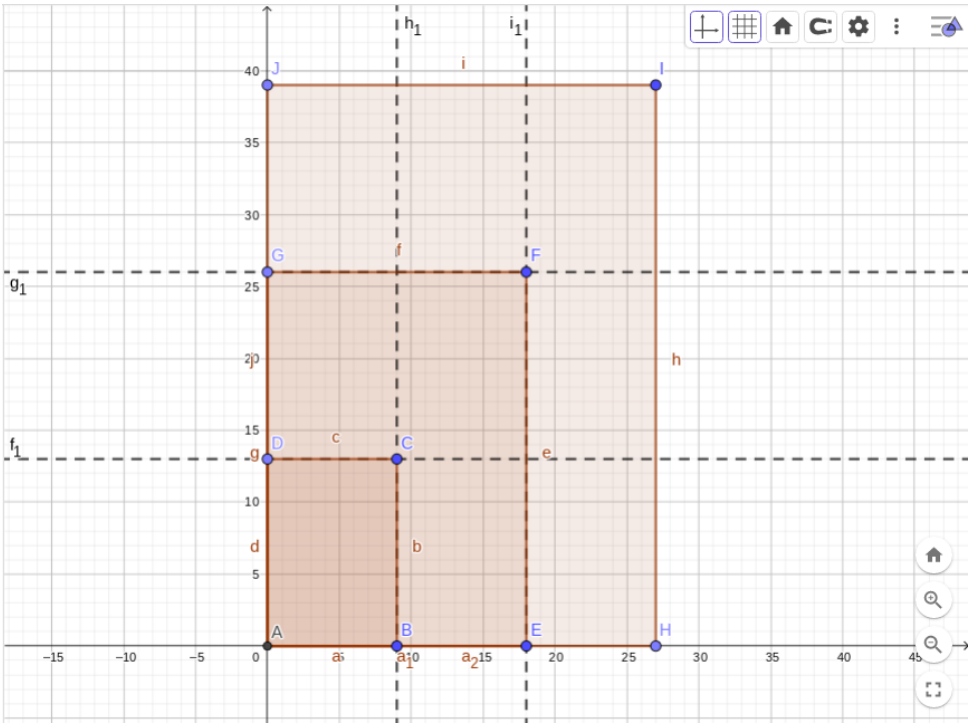


Figura 3.27: El porta retratos más chico entra 4 veces en el mediano, y 9 veces en el grande.

Validación

La resolución da cuenta de la no linealidad entre *perímetro* y *área* del rectángulo. Esto mismo se puede observar si se experimenta con el archivo *perimetro_vs_area_rectangulo* (ver perimetro_vs_area_rectangulo), el cual está armado de forma tal que al desplazar el deslizador *razonbasealtura* horizontalmente se grafican las funciones *perímetro* y *área*, donde el eje de las abscisas representa la longitud de la base del rectángulo.

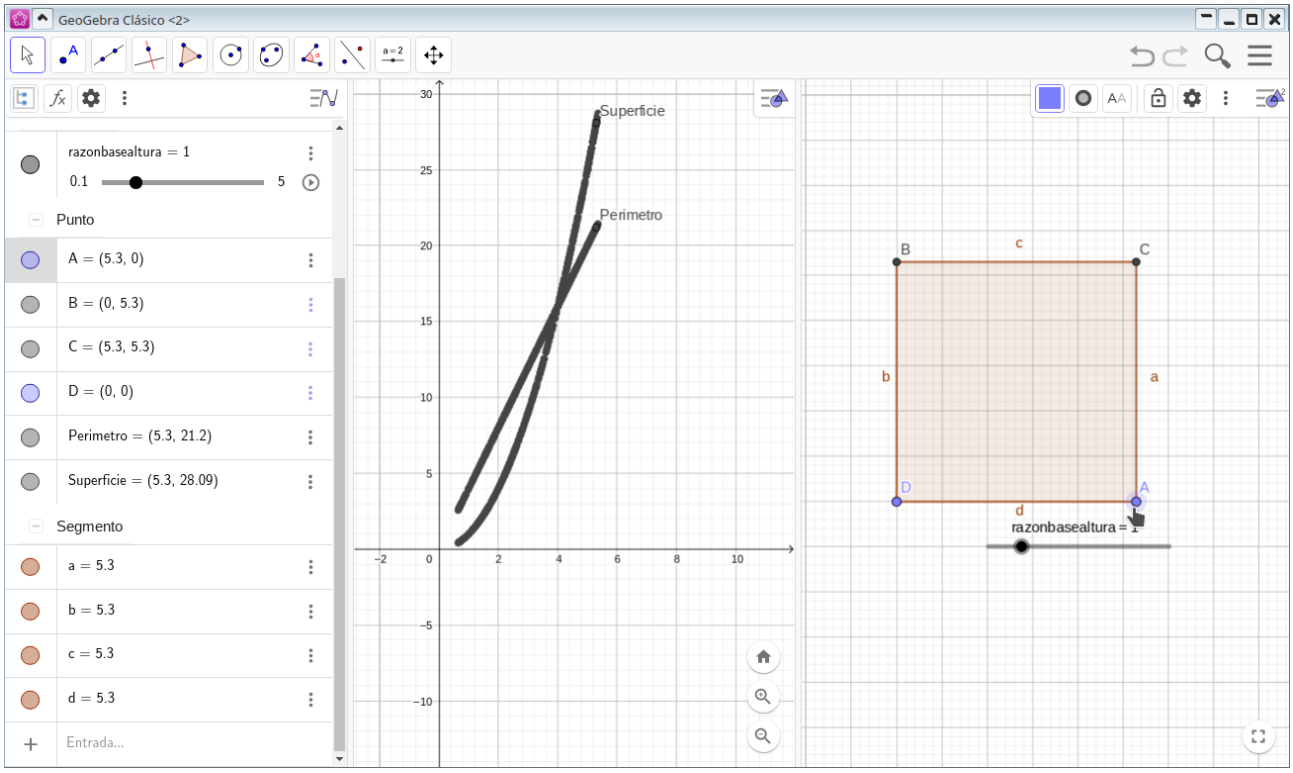


Figura 3.28: Trazas de las funciones *Perímetro* y *Área*, dependientes del lado del rectángulo

Claramente el *perímetro* genera una relación lineal con su base. En cambio la superficie no es una recta, sino una curva (*parábola* en realidad). Se puede cambiar el deslizador *razonbasealtura* y modificar la relación entre la base y la altura; de esta manera se obtendrán otras trazas de funciones, pero con igual comportamiento, lineal para el *perímetro* y *cuadrático* para el *área*.

El análisis se puede extender a otras figuras (ver *perimetro_vs_area_circulo*) como el círculo, donde se observa similar comportamiento:

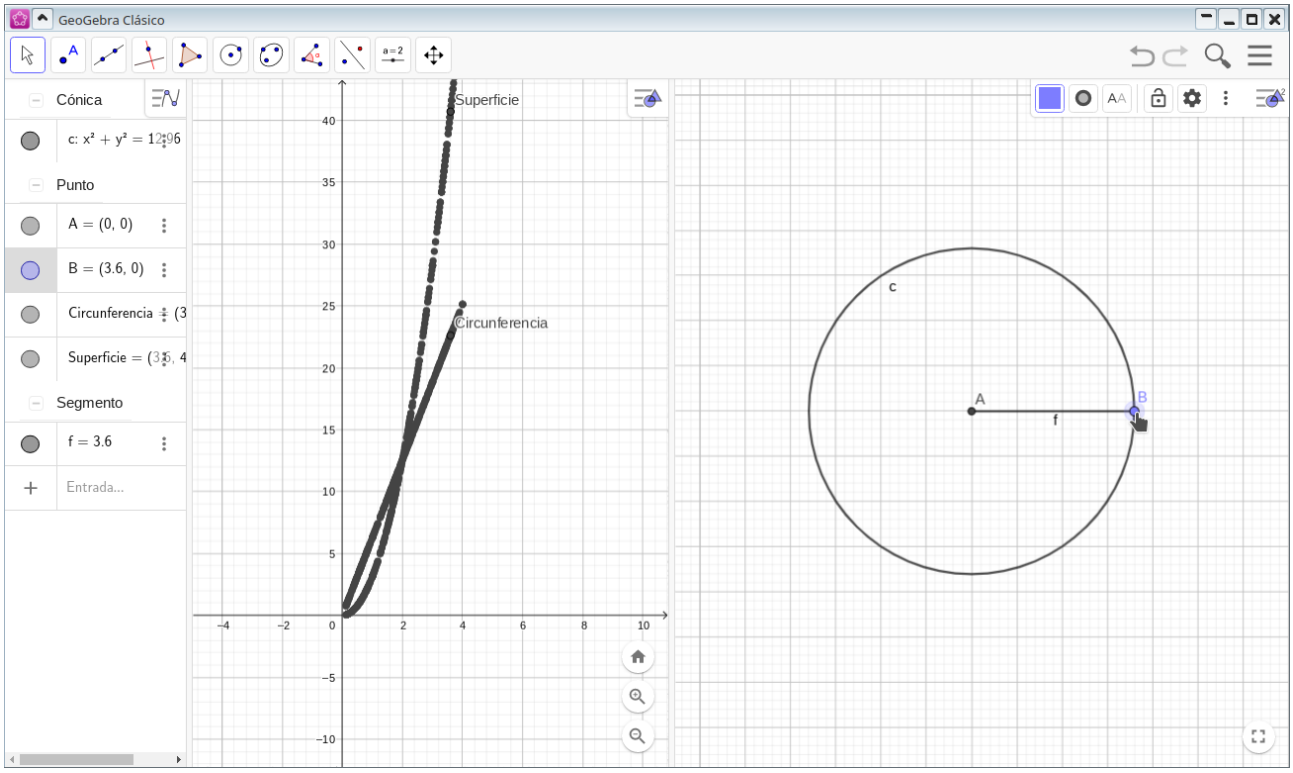


Figura 3.29: Trazas de las funciones *Perímetro* y *Área*, dependientes del radio del círculo

Formalización

Esta situación problemática permite entender que para una familia de rectángulos semejantes *no existe una relación linealmente proporcional entre el área y perímetro*. La idea de que al aumentar una magnitud también aumenta la otra es muy frecuente en el alumnado y, como se ha visto, puede ser trabajadas en el aula mediante una situación problemática que ponga de manifiesto si existe este preconcepto en ellos. En tal caso se repara el error al reconstruir ambos conceptos de forma independiente.

Es probable que la generalización que intuye Ana en el problema surja del hecho que tanto los conceptos de área como el de perímetro se enseñan al mismo tiempo en la escuela.

A continuación el docente podrá reforzar la labor estudiando otras figuras geométricas, directamente desde *GeoGebra*.

3.1.4. Teorema de Pitágoras

Nombre: Descubriendo a Pitágoras.

Resumen: En esta actividad los alumnos descubrirán el *Teorema de Pitágoras* mediante un problema donde se debe calcular el área de los cuadrados que se forman en los lados de triángulos rectángulos.

Objetivo: Teorema de Pitágoras.

Saberes: Área de un cuadrado, Triángulos rectángulos.

Edad: 12 a 13 años.

Preparación La secuencia hace uso de las herramientas de geometría como el círculo (compás) segmentos, puntos fijos y puntos móviles. Las demostraciones del *Teorema de Pitágoras* que se realizan en la etapa de formalización requieren precisión, por lo que se recomienda que el docente las exponga -primero- al grupo mediante un proyector para que luego los alumnos puedar replicarlas en sus dispositivos.

Planteo

Un fabricante de escaleras las fabrica de $5m$ de largo, y recomienda no apoyarla a más de $3m$ de distancia de la pared ni a menos de $1m$, para mantener la estabilidad y evitar accidentes. ¿Qué tan alto y bajo se puede llegar con la escalera apoyada en la pared?

Figura 3.30: Escalera apoyada en la pared.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*:El problema trata sobre una escalera de mano, simple, que mide $5m$ de altura y se la apoya en la pared. La base de apoyo de la escalera debe estar entre $1m$y $3m$de distancia de la pared para que sea estable. Hay que resolver qué alturas mínima y máximas se puede alcanzar con esa escalera apoyada en la pared.

2. *Pensar una estrategia*: Este es un problema de exploración cuya respuesta, será a priori, empírica mediante dibujos en papel con regla. Es probable que los chicos dibujen el perfil de la pared y piso, las medidas de $1m$ y $3m$ y luego tracen la linea que hace de escalera con una medida foja o compás.

3. *Ejecutar el plan*: Con lápiz, regla y compás es muy fácil llevar adelante el plan y obtener las medidas. En particular el docente podrá proponer llevar adelante esta actividad con *GeoGebra* ([12]). Para ello utilizamos el eje vertical como pared y el horizontal como piso, marcamos el segmento «f» de extremos A y B sobre este último. El punto A se debe encontrar a $1m$ de distancia del origen, y el B a $3m$. Sobre el segmento «f» se marca el centro «C» de una circunferencia de radio fijo igual a $5m$ con la herramienta

[12]También podría realizarse en el cuaderno, a escala, usando un palillo de 5cm de longitud.

«Circunferencia: centro y radio». Por último se grafica el segmento «g» con un extremo en el punto «C» y otro «D» en la intersección de la circunferencia con el eje vertical.

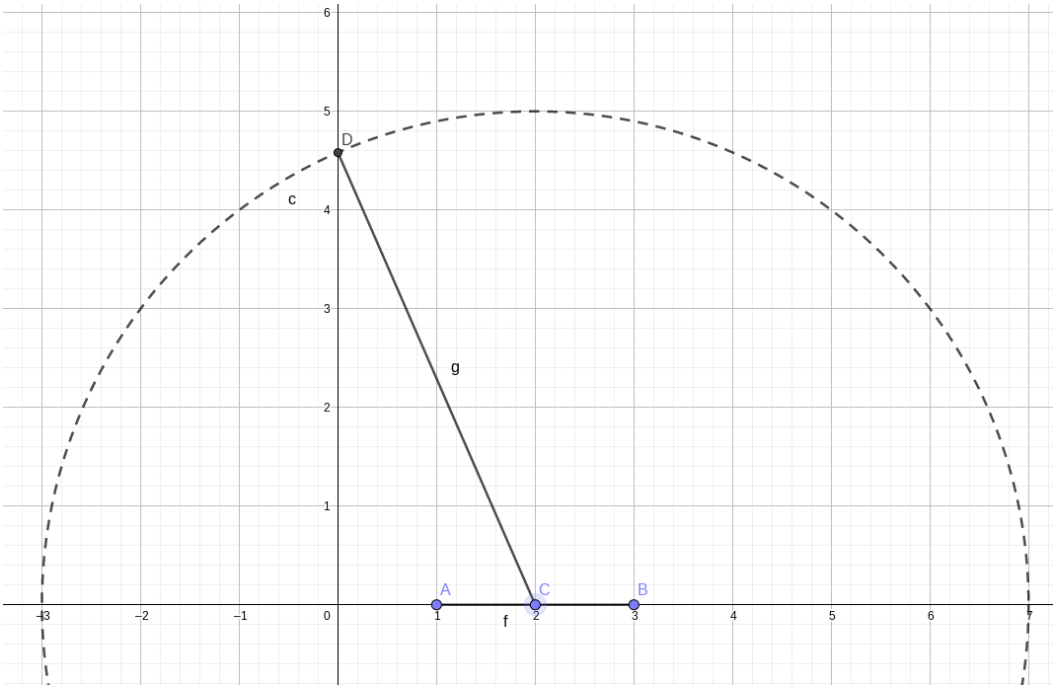


Figura 3.31: El segmento «g» representa la escalera de $5m$ de longitud, y los puntos A y B son el mínimo y máximo en que puede desplazarse la base. En nuestro caso los fijamos para que no puedan moverse.

El segmento «g», por diseño, es móvil en su extremo «C» y siempre mide $5m$. Al mover el punto «C» entre «A» y «B» el punto «D» se mueve en el eje vertical marcando los valores máximo y mínimo buscados:

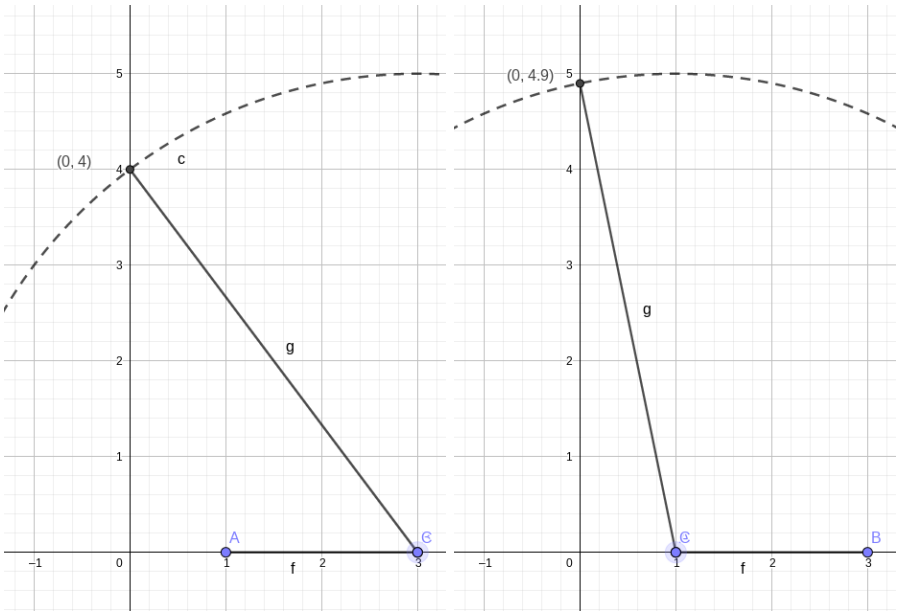


Figura 3.32: Cuando «C» está en «A» ($1m$) se obtiene la máxima altura ($4.9m$) y cuando está sobre «B» ($3m$) se obtiene la menor altura «$4m$». Al punto «D» se lo configuró para que muestre las coordenadas, pero también se puede graficar un segmento desde el origen hasta él para encontrar la altura en la pared.

4. *Verificar y repensar la solución*: Se pueden verificar estos mismos resultados si se ha realizado la resolución

en papel, corroborando que coincide. El docente podrá consultarles a los alumnos si los valores $4m$ y $4.9m$ obtenidos son exactos, y ante la duda podrá proponer que en la configuración de *GeoGebra* agreguen más decimales (ver *en «Propiedades»*):

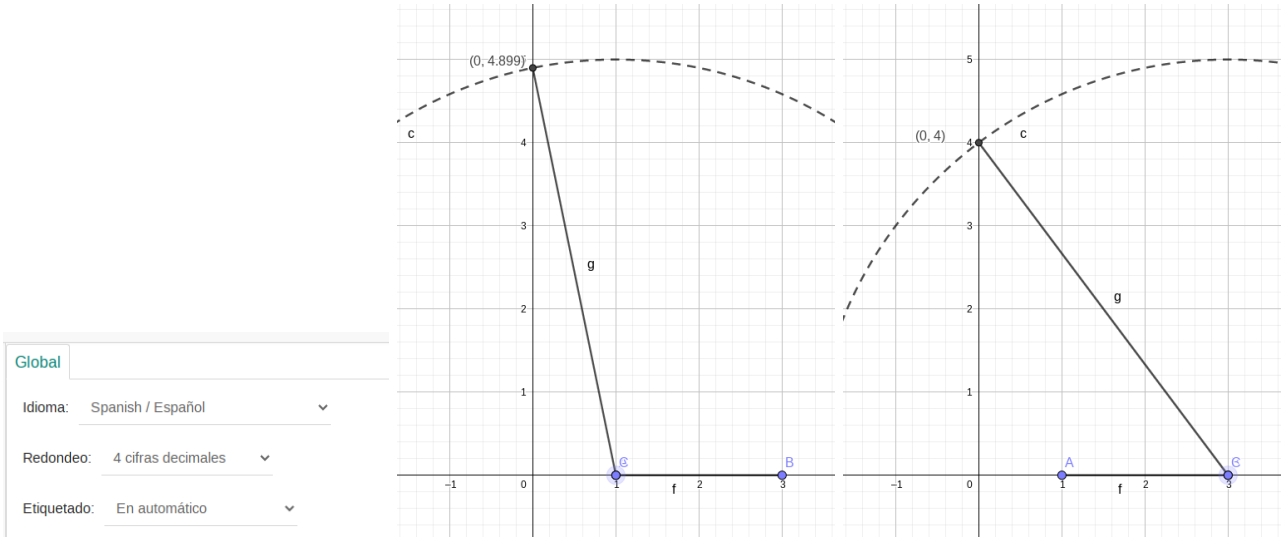


Figura 3.33: Redondeo con 4 cifras decimales. La altura máxima es ahora $4.899m$ y la mínima sigue siendo $4m$.

Esta situación servirá como disparador para la etapa de validación, para entender cuál es el origen de esas medidas.

Validación

La etapa de validación tiene como objetivo encontrar un método para calcular la medida de la altura sin necesidad de dibujar en escala la escalera, reconociendo que ella forma con la pared y piso un triángulo rectángulo. Para ello el docente les propondrá la siguiente actividad:

En grupos de 3 o 4 integrantes repartirá las siguiente ternas con las que formarán triángulos (rectángulos), y en los cuales deberán dibujar cuadrados para cada uno de sus lados:

- 6, 8, 10
- 5, 12, 13
- 7, 24, 25

Luego preguntará a sus alumnos si encuentran alguna relación numérica entre las áreas de los tres cuadrados que se forman en los lados hacia el exterior del triángulo.

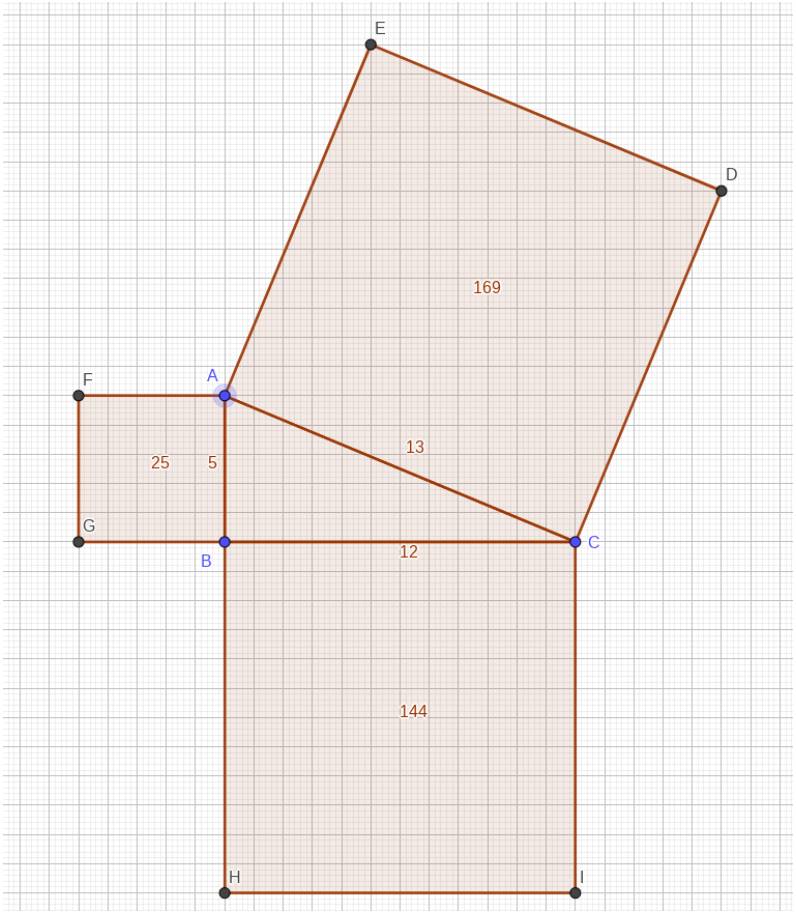


Figura 3.34: En este caso se graficó el triángulo de lados $5, 12, 13$ y sus respectivos cuadrados en cada lado.

Luego de explorar por un rato se espera que los alumnos encuentren que las áreas de los cuadrados más pequeños suman el valor del cuadrado mayor, es decir que para este caso $25 + 144 = 169$. Luego de corroborar este comportamiento para todos los triángulos de cada grupo el docente propondrá corroborar lo mismo con el triángulo del problema: $(3, 4, 5)$ y $(1, 4.9, 5)$.

Los alumnos podrán verificar fácilmente esta relación, y el docente podrá guiarlos para que establezcan una fórmula basada en la relación de las áreas de la figura anterior:

$área_1 + área_2 = área_3$, porque $25 + 144 = 169$

es decir que, $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow (altura)^2 + (base)^2 = (lado\, oblícuo)^2$

De esta forma, conociendo el lado de la altura y base de un triángulo rectángulo es posible conocer el lado restante con la fórmula anterior.

Formalización

Dado un triángulo rectángulo de lados a, b, c, se conoce como *Teorema de Pitágoras* a la igualdad dada entre la suma de los cuadrados de los lados menores y el cuadrado del lado mayor. A los lados menores se los conoce como *Catetos* y al lado mayor como *Hipotenusa*.

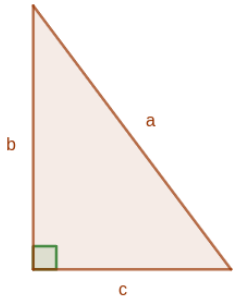


Figura 3.35: Triángulo rectángulo de hipotenusa «a» y catetos «b» y «c».

Para este triángulo la fórmula es:
$a^2 = b^2 + c^2$

El docente también podrá hacer mención a las *Ternas Pitagóricas*, como aquellas que cumplen con esta fórmula y posteriormente podrá trabajar la fórmula como ecuación en la resolución de nuevos triángulos rectángulos cuyos lados no son enteros.

Una vez trabajado este concepto es importante realizar alguna demostración del *Teorema de Pitágoras*, como por ejemplo la demostración de *Pappus*:

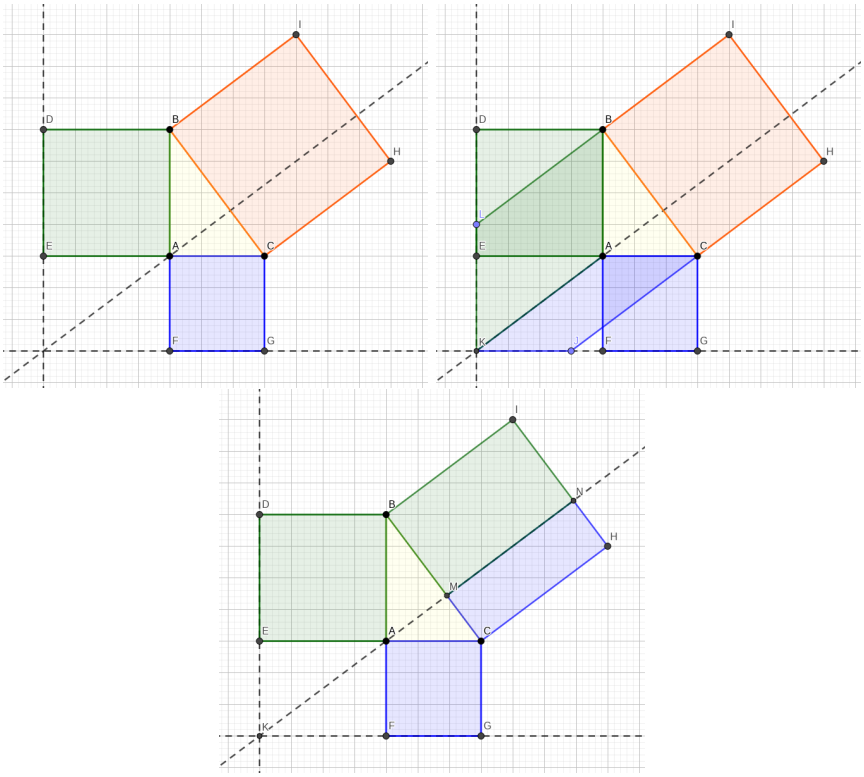


Figura 3.36: Secuencia de la demostración del *Teorema de Pitágoras* según *Pappus*: Los cuadriláteros de igual color tienen igual área.

Prácticamente la secuencia se explica sola:

1. Se traza una recta perpendicular a la hipotenusa por el punto A y las rectas $\overleftrightarrow{FG}$ y $\overleftrightarrow{ED}$.
2. Los lados de los cuadriláteros menores $\square DEAB$ y $\square FGCA$ se desplazan hacia el punto K, haciendo coincidir E y Fcon K, convirtiéndose ahora en paralelogramos de igual área que los cuadrados iniciales.
3. De forma análoga los paralelogramos se trasladan por la recta perpendicular a la hipotenusa y por los lados $\overleftrightarrow{BI}$ y $\overleftrightarrow{CH}$ hasta hacerlos coincidir con el cuadrado mayor $\square BCHI$.

Otra demostración, titulada «*Demostración mecánica por transposición de partes del teorema del Triángulo Rectángulo*» puede presentarse al alumnado como una actividad del tipo *rompecabezas*, donde los chicos tienen que ordenar las partes Ia Vque conforman los cuadrados de los catetos en el cuadrado de la hipotenusa, demostrando así la equivalencia entre áreas del teorema.

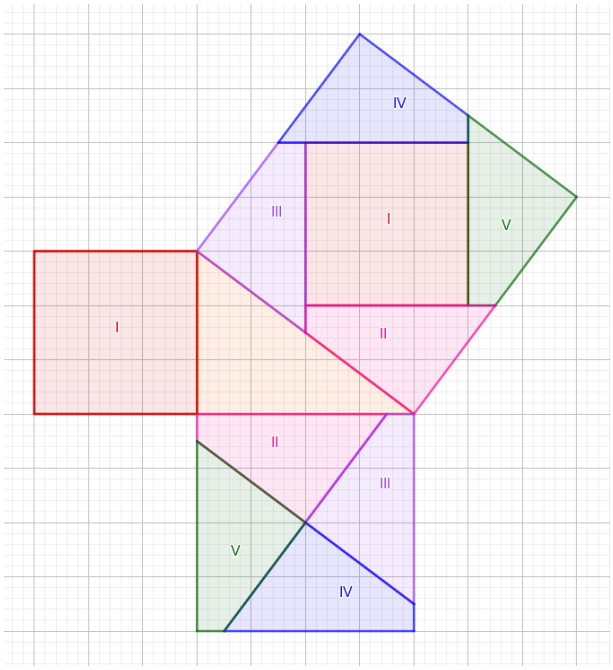


Figura 3.37: Demostración geométrica de *Perigal*, resuelta.

3.1.5. Transformaciones de figuras

Nombre: Teselados en el piso.

Resumen: El problema trata sobre cómo dar instrucciones para embaldosar el piso utilizando teselas y aplicando transformaciones en el plano.

Objetivo: Introducir el concepto de transformación de figuras en el plano mediante las teselaciones: Traslación, Rotación, Simetría axial, Simetría central y Homotecia..

Saberes: Figuras planas, ángulos.

Edad: 15 a 17 años.

Preparación En la actividad propuesta se utilizan principalmente herramientas de geometría como puntos, poligonales y vectores. Luego, finalizando, se hace uso de la botonera de transformaciones.

Planteo

Un arquitecto tiene que cubrir el piso de una habitación de una casa. Está pensando en diseñar distintos teselados con baldosas para luego mostrarle a los dueños de la casa para que ellos elijan qué modelo van a colocar en el piso. El arquitecto puede conseguir baldosas de diferentes forma y tamaño, pero una vez que el diseño esté listo debe dar las instrucciones exactas para instalarlas en el piso.

Pensó varios modelos diferentes, que se repiten en toda la extensión del piso:

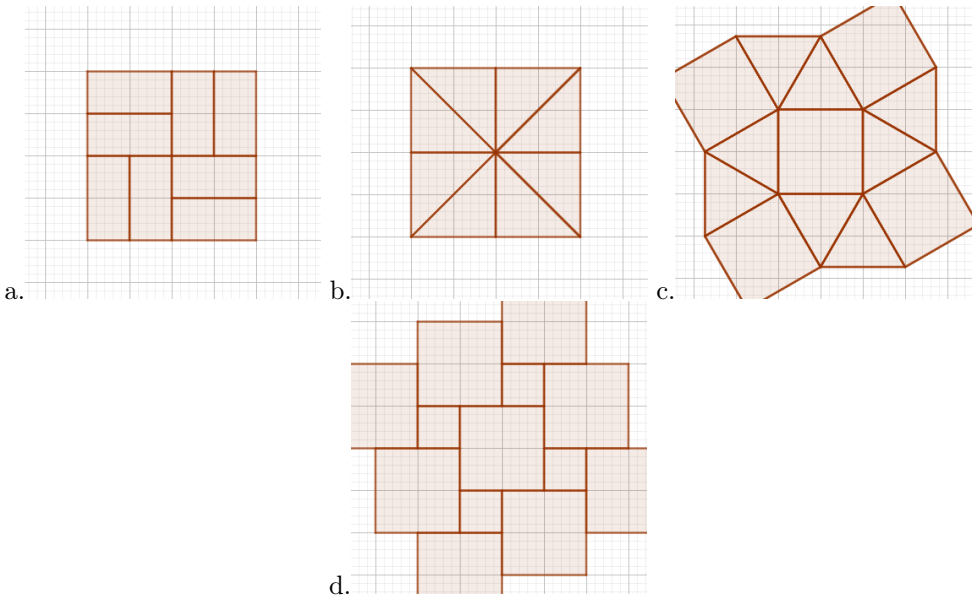


Figura 3.38: Cuatro diseños distintos de teselados. Se observa que en los dos últimos se utilizan baldosas diferentes.

¿Puedes ayudarlo a escribir con precisión esas instrucciones?

Nota: El docente podrá comentarles a los alumnos que esta forma de embaldosar el piso se conoce como teselación, es decir recubrir un plano con determinadas figuras sin que haya espacios vacíos entre ellas ni se superpongan. Generalmente las teselaciones se hacen con figuras regulares o semi-regulares que repiten un patrón de encastre. No es necesario brindar una definición formal puesto que en este problema se utilizará el término teselado como sinónimo de embaldosado.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema pide encontrar instrucciones precisas que permitan la colocación de las baldosas en el piso, de forma que lo cubran todo. Dada la naturaleza del problema existirán

muchas formas de describir esas instrucciones. El docente deberá indagar si los alumnos pueden expresar el problema con palabras propias. Quizás sea una buena idea armar grupos para que debatan cuál es el problema a resolver, luego también servirá para buscar estrategias entre todos los integrantes.

2. *Pensar una estrategia*: Lo primero que debe surgir, si no es por cuenta propia será entonces como propuesta del docente, que los alumnos dibujen cada una de las secuencias para entender cómo se cubre el plano con las baldosas. Así, por ejemplo, los alumnos pueden describir qué figuras hay en cada una y qué posiciones toman en el plano. Además, el docente pude recomendarles a los chicos que anoten en un breve texto lo que hicieron al dibujar, o que indiquen con flechas y anotaciones en el dibujo qué movimientos hay que hacer para obtener cada secuencia de teselado.
   Otra manera puede ser dibujar y recortar las figuras (o que el docente las lleve ya recortadas) y así, como un juego de rompecabezas, entender cuáles son los movimientos que permiten obtener el teselado.

3. *Ejecutar el plan*: Para la primer estrategia, si bien se puede hacer en una hoja con regla y lápiz en una primera etapa, luego será de utilidad hacerlo también en *GeoGebra* para que el docente retome estas construcciones en la etapa de validación. Se puede esperar que para cada secuencia los alumnos describan algo similar a lo siguiente, siempre partiendo de una figura inicial:
   a) «Copiar hacia abajo el rectángulo en una unidad, para así obtener un cuadrado formado por dos rectángulos. Luego copiar y girar 90° el conjunto de los dos rectángulos y ubicarlos del lado derecho del cuadrado»
   b) «Reflejar el triángulo de origen por su hipotenusa, formando un cuadrado entre los dos triángulos. Luego reflejar ese conjunto hacia la derecha formando un rectángulo de cuatro triángulos. Por último volver a reflejar el rectángulo hacia abajo, quedando los ocho triángulos dispuestos en un gran cuadrado en cuyo centro se juntan los triángulos.»
   c) «Adosar al cuadrado un triángulo equilátero en cada lado, formando una especie de estrella. Luego, siguiendo el mismo orden en el sentido de las agujas del reloj adosar a cada triángulo un cuadrado y luego a él un triángulo equilátero, completando toda la vuelta.»
   d) «Partiendo de un cuadrado, colocar de forma adyacente al su lado derecho un cuadrado cuyo lado mida la mitad que el primero, haciendo coincidir también un vértice de cada uno. Luego colocar un cuadrado grande adyacente a estos dos, repitiendo el procedimiento para cada vértice del cuadrado original, siguiendo el sentido antihorario.»
   Es posible que las instrucciones no sean del todo precisas, entonces el docente podrá solicitar que las describan de forma gráfica. Pueden utilizar *GeoGebra* para conseguir cada figura geométrica, dibujándola manualmente y ayudándose con la herramienta «Lápiz» para hacer las anotaciones necesarias ( )[13]:

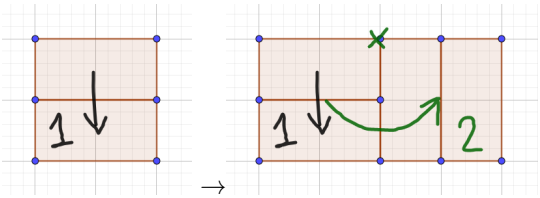


Figura 3.39: Un ejemplo de cómo pueden describir gráficamente la secuencia de construcción de la primer tesela.

4. *Verificar y repensar la solución*: Si la clase se desarrolló en grupos, quizás sea una buena idea hacer que cada grupo le pase las instrucciones a otro grupo para que puedan cotejar si llegan a resolver el problema. El docente tomará nota de los debates y descripciones.

Validación

En la etapa de validación el maestro retomará las instrucciones de cada grupo para cada secuencia y las dibujará en *GeoGebra*, pero esta vez utilizará las herramientas que el programa posee para tal fin. Además comenzará a utilizar un lenguaje específico, matemático.

- Comenzará con la primera de las secuencias. Graficará el primer rectángulo $\overset{\square}{ABCD}$ de medidas 2×1

[13] Se recomienda utilizar la apariencia de Geometría conla cuadrícula visible.

, luego dibujará un «Vector»[14] de longitud igual a 1 unidad y sentido norte-sur «$\overrightarrow{u}$», luego aplicará la herramienta «Traslación», obteniendo el segundo rectángulo $A'B'\overset{\square}{C'}D'$:

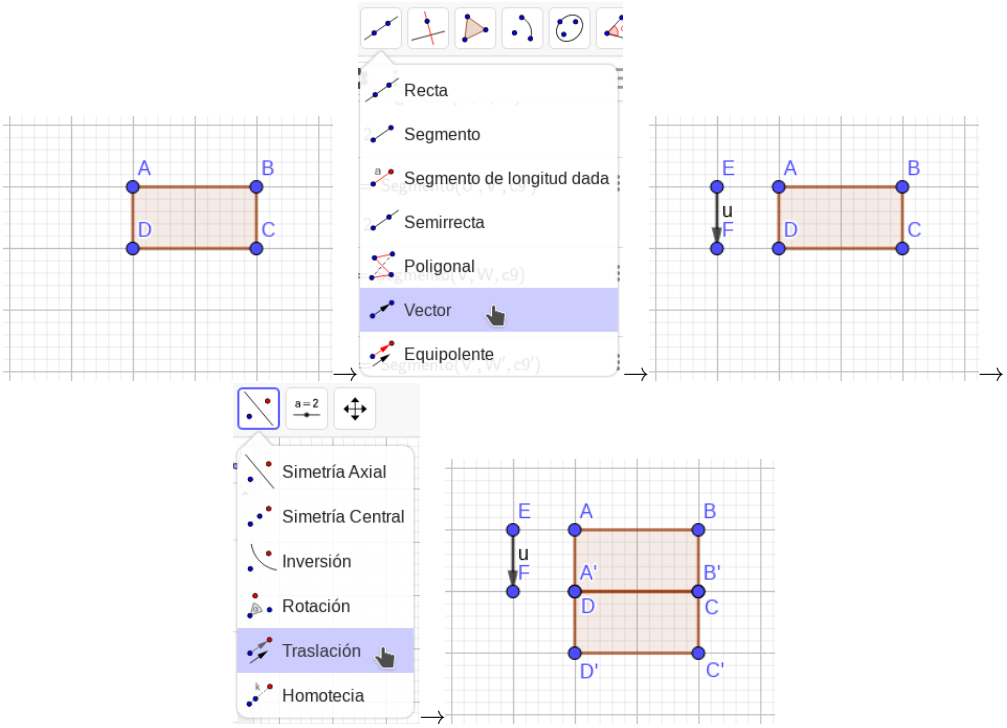


Figura 3.40: De esta forma se consigue la primera copia del rectángulo original.

Les preguntará a los alumnos si la aplicación de esta herramienta se asemeja a lo que ellos hicieron para empezar a resolver el problema. Además esperará que los alumnos noten que cada uno de los puntos del primer rectángulo tienen su homólogo, así A se transforma en A', B en B', etc. Este comportamiento automático de *GeoGebra* se observará en cada una de las transformaciones aplicadas.

A continuación utilizará la herramienta «Rotación», tomando el punto «B» como pivote de giro con 90° de rotación en sentido antihorario, obteniendo ahora una segunda copia del rectángulo, el $A'_1\overset{\square}{B'_1}C'_1D'_1$. Por último duplicará este rectángulo de forma similar a como se hizo previamente pero esta vez con un vector horizontal de longitud 1 y sentido oeste-este «$\overrightarrow{v}$», obteniendo ahora el cuarto rectángulo $\overset{\square}{IJ}KL$:

[14] Al igual que otros conceptos de apoyo, no es necesario que el docente defina rigurosamente qué es un vector, solo bastará con explicarlo como un segmento orientado que sirve como instrucción para mover un objeto de un lugar a otro.

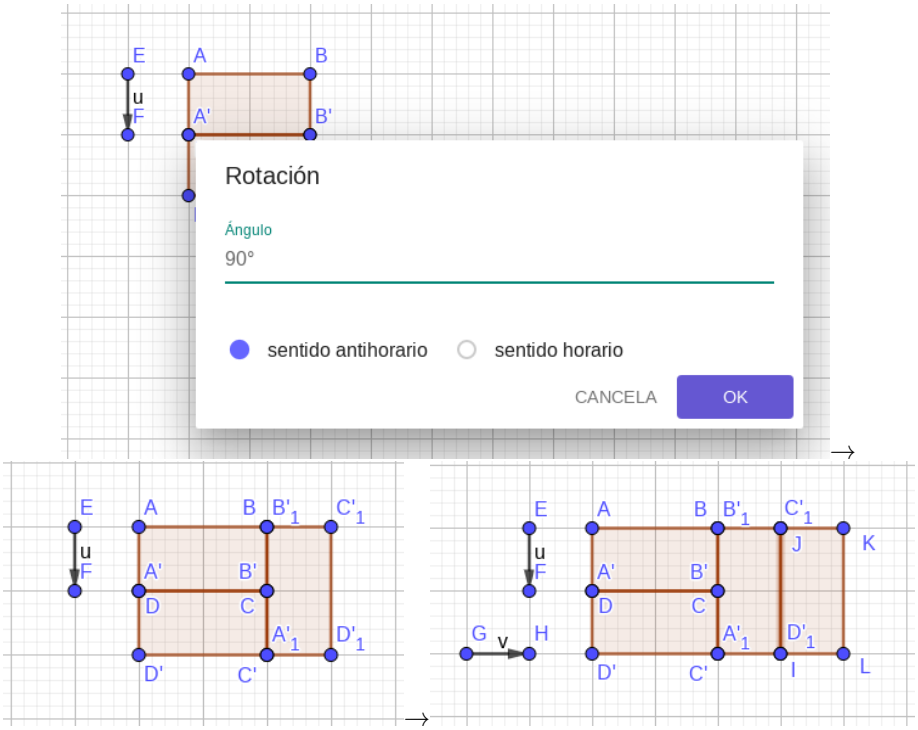


Figura 3.41: Así conseguimos el tercer y cuarto rectángulo de la secuencia.

Nota: La notación de los rectángulos parece confusa, sin embargo es la que dispone el programa *GeoGebra* de forma automática. Podríamos cambiarlos para que su lectura sea más sencilla, sin embargo entorpeceríamos la secuencia didáctica.

El docente podrá preguntar a continuación cómo obtener la siguiente fila inferior de esta tesela, esperando como respuesta que los alumnos le indiquen cómo repetir estos «movimientos» con desplazamientos y rotaciones, incluso utilizando los vectores ya creados.

- Para la segunda teselación el docente dibujará un primer triangulo rectángulo isósceles $A\overset{\Delta}{B}C$ con base en $\overline{BA}$ y altura $\overline{BC}$. Luego activará la herramienta «Simetría axial», señalará el triángulo y luego el segmento $\overline{AC}$ (hipotenusa del triángulo $A\overset{\Delta}{B}C$), obteniendo así un nuevo triangulo, $A'\overset{\Delta}{B'}C'$. Luego utilizará el lado $\overline{A'B'}$ (cateto derecho del triángulo $A'\overset{\Delta}{B'}C'$) como nuevo eje de simetría, obteniendo ahora el tercer triángulo $A''\overset{\Delta}{B''}C''$.

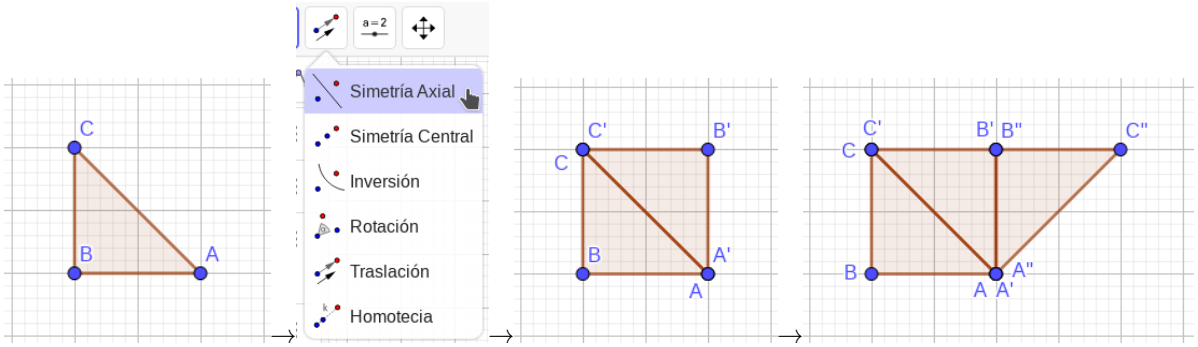


Figura 3.42: El segmento $\overline{AC}$ actúa como un espejo que refleja el triángulo. La imagen resultante es una imagen especular de la original.

Para el resto de los triángulos, el docente les preguntará a los alumnos de qué manera puede obtenerlos. Se espera que ellos repitan el mismo procedimiento de simetrías axiales:

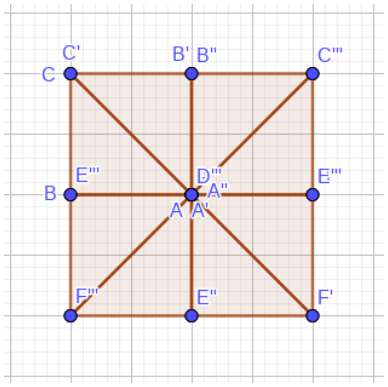


Figura 3.43: Los 8 triángulos, reflejados de dos en dos, forman un gran cuadrado.

Algunos triángulos pueden ser obtenidos mediante la traslación, es posible que algún alumno note que esto es posible y en tal caso el docente deberá hacer lugar a esa observación. Asimismo el docente aprovechará este momento para hacer notar que existe otra herramienta ya vista en *GeoGebra* que permite obtener la mitad inferior de la tesela sin usar la simetría axial, esta herramienta es la «Rotación» aplicada con un ángulo de un llano o 180° usando como pivote el punto A. Entonces, una vez obtenida la primera mitad del cuadrado, en lugar de seguir aplicando simetrías axiales se podría aplicar esa rotación[15]:

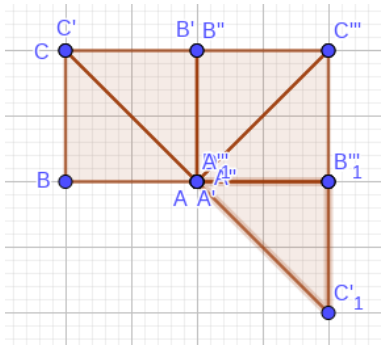


Figura 3.44: El triángulo resaltado es imagen del triángulo original $\overset{\Delta}{ABC}$ obtenido mediante una rotación de 180° por el punto A. De igual forma se pueden obtener los triángulos que faltan en la parte inferior.

- Para la tercera teselación el profesor podrá preguntarles a los alumnos cómo comenzarían a armarla utilizando las herramientas de transformaciones vistas en los casos anteriores, partiendo del primer cuadrado y del triángulo como figuras de base. Con un poco de creatividad la clase verá que no existe una única forma de resolver este teselado, por lo que el docente podrá proponer simetrías axiales para duplicar el triángulo:

[15] Más adelante, en la etapa de formalización se verá que esta transformación se denomina «Simetría Central»

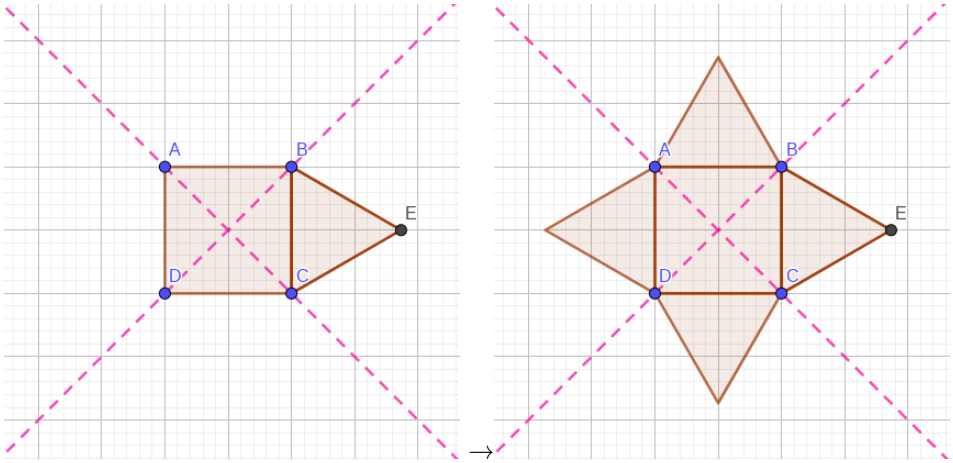


Figura 3.45: Con simetrías axiales se consiguieron los triángulos que rodean al cuadrado central.

Luego se puede continuar con rotaciones de 60 ° para obtener los triángulos restantes (aunque también se podría hacer con simetrías axiales, pero habría que crear primero los ejes para ello):

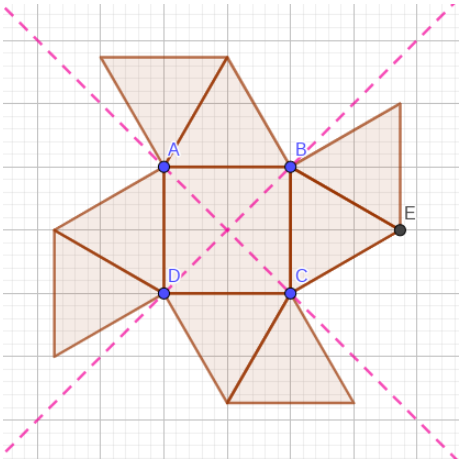


Figura 3.46: La tesela toma la forma de «molinete».

Por último, se completa el teselado con los cuadrados restantes haciendo una rotación del cuadrado central de 210° para cada uno de sus vértices:

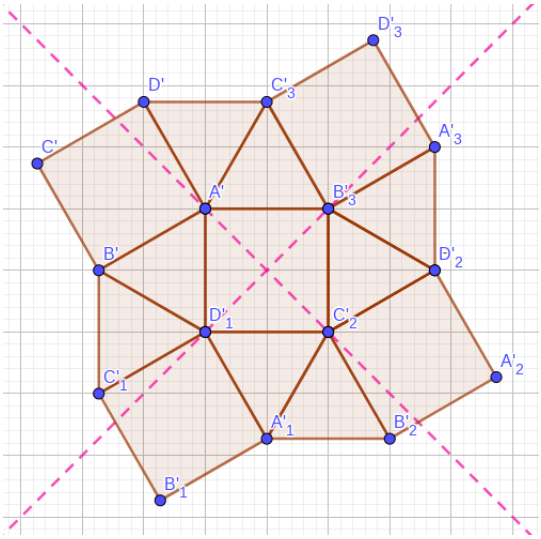


Figura 3.47: La tesela se completa con los cuadrados. Para obtenerlos por rotación se suman los ángulos internos de cada figura. Si se hace en el sentido antihorario son $90° + 60° + 60° = 210°$, si se hace en sentido horario son $90° + 60° = 150°$.

- El docente explicará que la cuarta y última tesela necesita de un tipo de transformación distinta a las vistas. Es necesario «escalar y trasladar» el cuadrado original para que el lado del cuadrado menor mida exactamente la mitad y se ubique en la posición deseada. Para ello utilizará la herramienta «Homotecia», que permite obtener una figura semejante a la original pero escalada en tamaño dado un factor determinado. Además esta transformación necesita de un punto que haga las veces de «foco o pivote» para ubicar la figura transformada en el plano.
  Dibujará un cuadrado inicial y luego un punto (E) a dos unidades de distancia a la derecha del punto D. A continuación aplicará la homotecia del cuadrado desde el punto E, con un factor de escala igual a $1/2$ o 0.5 unidades.

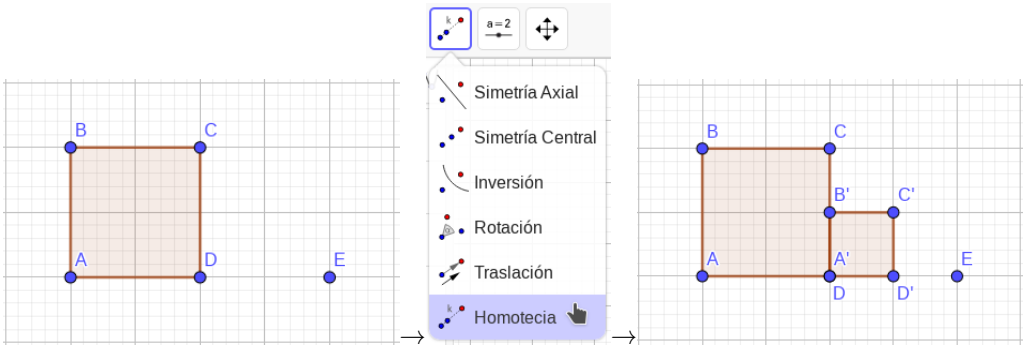


Figura 3.48: De esta forma se consigue un cuadrado de tamaño menor que el original cuyo lado mide exactamente la mitad que aquel.

La elección del punto E a cierta distancia del punto D no es casual, a decir verdad cada punto del cuadrado más pequeño se encuentra a mitad de camino entre su homólogo del cuadrado original y el punto E, cosa que el docente podrá hacer notar a los alumnos mediante las preguntas apropiadas: ¿Qué distancia hay entre A y E?, ¿y entre D y E?, ¿qué sucede con las distancias a E de los demás puntos?. También podrá mostrar que moviendo el punto a otra ubicación el cuadrado menor sigue manteniendo el factor de $1/2$ pero cambia su locación en el plano, y sin embargo la relación de distancias se conserva según el mismo factor.

Ahora el maestro puede pedir a los alumnos que completen la secuencia de la tesela, y es probable que surja la idea de hacer traslaciones, ya que conservan las formas:

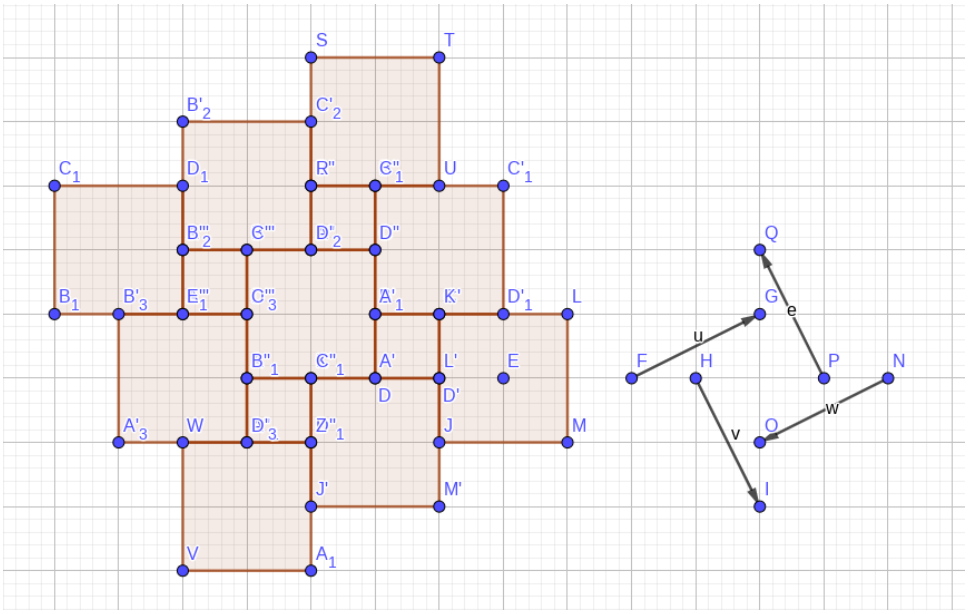


Figura 3.49: A partir de los dos cuadrados generados anteriormente y con la asistencia de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{e}$ se logró terminar de armar la tesela.

Para finalizar la etapa de validación el docente podrá repasar cada una de las construcciones para cada tesela, anotando en el pizarrón cuáles son las transformaciones destacadas. Esto servirá luego para organizar el contenido formal en la siguiente etapa.

Formalización

En la etapa de validación se describieron las instrucciones, paso a paso, que permiten obtener las teselas del problema. El docente explicará que su nombre propio en matemática es «Transformaciones en el plano», o simplemente «Transformaciones». También les dirá que algunas de ellas conservan la forma y tamaño, las llamamos «Isometrías» y son: «Traslación», «Rotación», «Simetría axial» y «Simetría central». La última tesela, donde es necesario escalar el cuadrado para obtener uno que tenga la mitad de longitud de lado es un «Isomorfismo» llamado «Homotecia» que genera una figura similar en forma a la original pero no necesariamente del mismo tamaño.

A continuación el profesor describirá cada una de estas transformaciones apoyándose en cada caso con las teselas vistas en el problema.

Traslación La traslación es una isometría que realiza un cambio de posición o lugar en el espacio, manteniendo las formas (ángulos) y tamaños (medidas) de las figuras, dicha traslación puede ser determinada por un vector o por dos puntos (el origen y el destino).

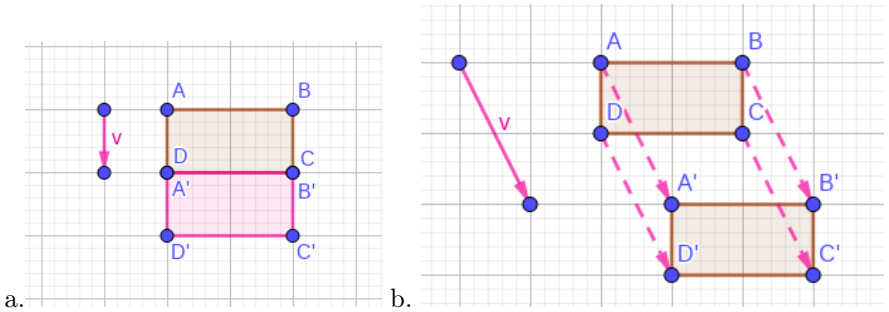


Figura 3.50: A la izquierda, traslación del rectángulo $\overset{\square}{ABCD}$ por $\overrightarrow{v}$. La imagen de la derecha muestra la traslación de $\overset{\square}{ABCD}$ con otra longitud y dirección del vector $\overrightarrow{v}$.

Rotación Una rotación es una transformación isométrica que gira una figura alrededor de un punto fijo llamado

centro de rotación. La rotación se define por el ángulo y el sentido (horario o antihorario) en la que se gira la figura, manteniendo su forma y tamaño.

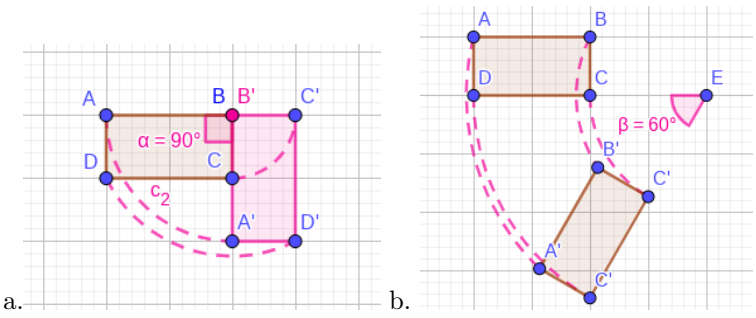


Figura 3.51: A la izquierda, rotación del rectángulo $\overset{\square}{ABCD}$ por el punto B y ángulo de 90 ° en sentido antihorario. A la derecha, rotación del rectángulo $\overset{\square}{ABCD}$ por el punto E y ángulo de 60 ° , también en sentido antihorario.

Simetría axial También es un tipo de transformación isométrica, donde una figura se refleja a través de un eje llamado «eje de simetría», como si fuera un espejo. La imagen resultante es una imagen «especular» de la original, donde cada punto de la figura tiene un punto correspondiente (homólogo) al otro lado del eje, equidistante del mismo y conectado por una línea perpendicular a dicho eje.

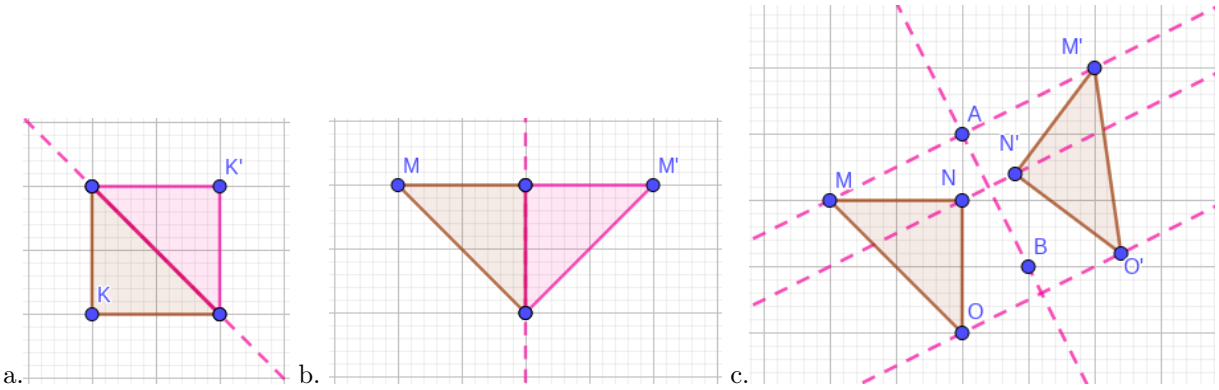


Figura 3.52: Las dos primeras imágenes responden a las simetrías de la segunda secuencia, se observa cómo los puntos K' y M' son imágenes especulares de K y M, respectivamente. La tercera de las imágenes muestra la transformación por simetría axial del triángulo $\overset{\triangle}{MNO}$ por la recta $\overleftrightarrow{AB}$, en $M'\overset{\triangle}{N'O'}$.

Simetría Central Es una transformación isométrica que refleja cada punto de una figura a través de otro punto fijo llamado «centro de simetría». Es decir que dado un centro se produce un nuevo objeto de modo que a cada punto le corresponde otro punto situado a la misma distancia respecto de dicho centro. En efecto, la simetría central no es más que una rotación de 180 ° a través de un centro.

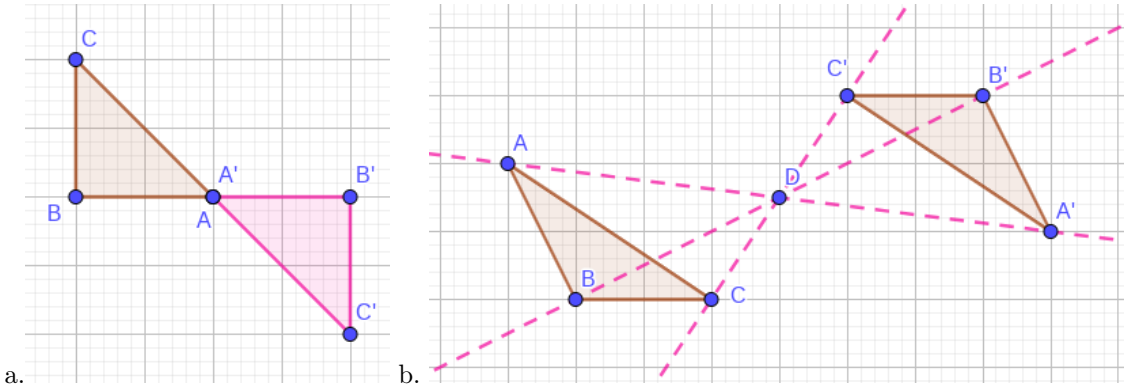


Figura 3.53: La imagen de la izquierda muestra el triángulo de la segunda tesela del problema con su respectiva simetría central. En la segunda imagen se aplica esta trasformación para el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ mediante el punto D.

Habrá que hacerles notar a los alumnos que *GeoGebra* también posee esta herramienta en el menú, puesto que en la etapa de validación no se utilizó.

Homotecia Es una transformación que permite obtener una figura semejante a otra a partir de un punto fijo llamado centro de homotecia. La homotecia se caracteriza por mantener la forma de la figura original, pero puede cambiar su tamaño (ampliarla o reducirla) al multiplicar todas las distancias por un mismo factor, llamado razón de homotecia.

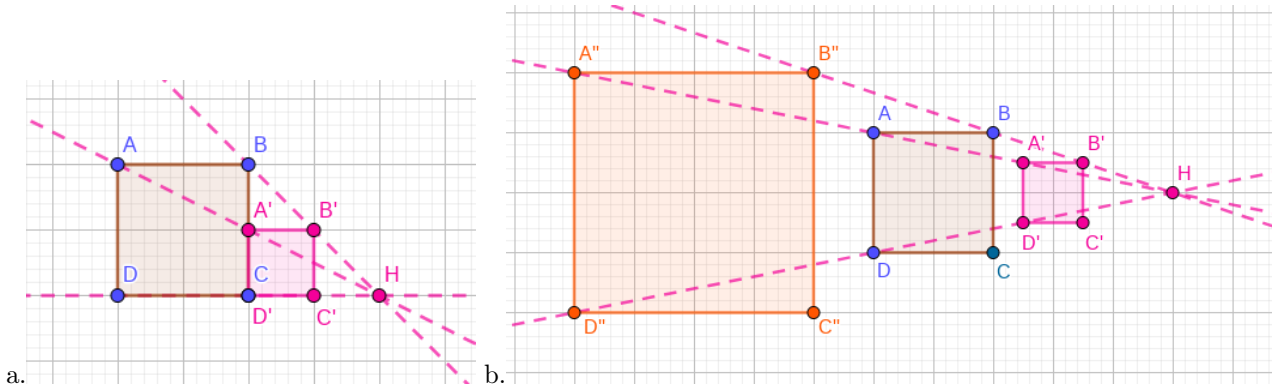


Figura 3.54: A la izquierda homotecia aplicada al cuadrado $\overset{\square}{ABCD}$, con centro en H y factor $1/2$, donde su posición hace que los ángulos $B\hat{C}D$ y $A'\hat{D}'C'$ sean adyacentes. A la derecha se muestran dos homotecias del cuadrado $\overset{\square}{ABCD}$ con el mismo centro H pero con diferentes factores, el $\overset{\square}{A'B'C'D'}$ (en violeta) posee escala de $1/2$, y el $\overset{\square}{A''B''C''D''}$ (en naranja) tiene un factor de 2.

Nótese que la distancia de D' a H es la mitad que la de D a H y en cambio la de D'' a H es su doble. El docente podrá indagar a los alumnos sobre qué resultados se obtendría si se utilizaran factores negativos.

Una vez definidas cada una de las transformaciones que se originaron en el problema disparador se podrá avanzar hacia nuevas problemáticas relacionadas con las transformaciones y sus propiedades. Será interesante explorar cómo puede conseguirse el mismo resultado con distintas transformaciones o composición de transformaciones. También se podrán experimentar con las transformaciones triviales que devuelven el mismo objeto de origen, como la traslación con vector de magnitud nula, los giros de 360°, las homotecias de factor 1, etc.

Por último, se podrá enriquecer la temática de las teselaciones, que es un tema muy interesante -y si se quiere complejo- pero que además conecta con las artes plásticas. En este sentido conviene citar al famoso artista *Maurits Cornelis Escher*, que fue un artista neerlandés del siglo pasado, conocido por sus grabados y dibujos imposibles, teselados y mundos imaginarios.

Escher fue un artista al que muchos biógrafos coinciden en no poder clasificarlo en algún estilo en particular. Se cuenta que se le ocurrían ideas por la noche y que las plasmaba al día siguiente. Sin duda su imaginación era realmente estupenda y fuertemente geométrica.

Nos interesa particularmente su trabajo con teselaciones del plano. El docente podrá proponer a los alumnos que identifiquen las figuras que observan y describan cuáles son las transformaciones que se aplican para obtener el teselado. Se invita a replicar en todo o en parte los teselados *Escher* con las herramientas que tiene *GeoGebra*.

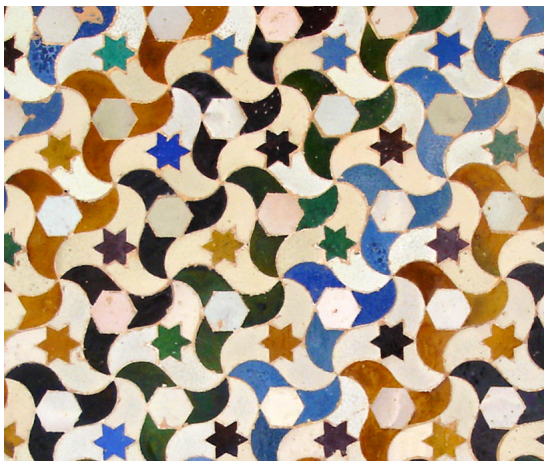


Figura 3.55: «Escher realizó un minucioso trabajo sobre este mosaico árabe de la Alhambra, 1936, donde ya demuestra su creciente interés por la teselación.»
Fuente: Wikipedia. Por Dmharvey - Trabajo propio, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1980257

Una de sus obras más famosas sobre teselaciones es «Reptiles», donde las lagartijas parecen salir del plano y cobrar vida tridimensional [16].:

Figura 3.56: Una de las obras más icónicas de Escher.
Fuente: Wikipedia. Fair use,
https://en.wikipedia.org/wiki/Reptiles_(M._C._Escher)#/media/File:Escher's_Reptiles.jpg

[16]Para conocer más obras del autor dirigirse a su sitio web, aquí solo mostramos parte de su trabajo a modo de cita ya que lamentablemente sus obras tienen Copyright.

3.1.6. Teorema de Thales

Nombre: Las medidas de la ventana.

Resumen: A partir de un problema para encontrar las medidas de los parámetros internos de una ventana se introduce el famoso Teorema de proporcionalidad entre paralelas de Thales de Mileto.

Objetivo: Mediante la exploración de medidas en triángulos semejantes se construye el Teorema de Thales.

Saberes: Figuras planas, triángulos, ángulos, Teorema de Pitágoras.

Edad: 14 a 15 años.

Preparación El desarrollo de la resolución del problema implica mediciones precisas, por ello se recomienda que el docente considere el uso de GeoGebra para obtener las magnitudes preliminares de la ventana. Es importante un trabajo previo con triángulos semejantes, aunque en la etapa de validación se retoman estos conceptos de forma intuitiva.

Planteo

Un arquitecto está diseñando una ventana especial, que irá bajo un techo inclinado, por lo tanto tendrá forma triangular. El profesional dibuja en la hoja el diseño y coloca las medidas que midió en la obra. Ahora necesita calcular las longitudes de los parantes (segmentos en color rojo), que son paralelos al parante lateral. ¿Puedes ayudarlo a conseguir esas medidas?

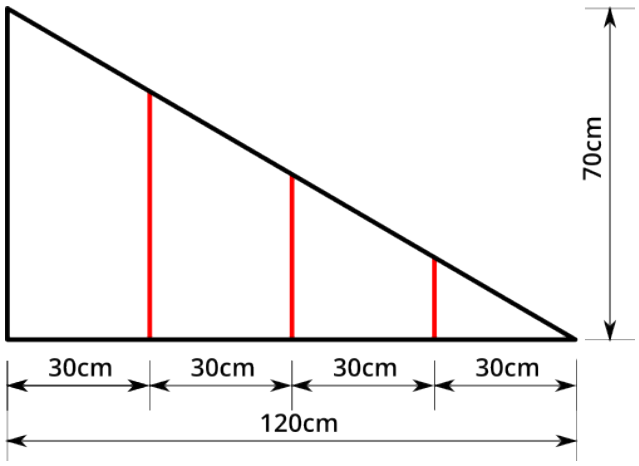


Figura 3.57: Ventana triangular que se colocará bajo un techo inclinado. El ángulo inferior izquierdo se supone recto por construcción.

Luego de pensar un rato se le ocurrió otro diseño, que también cabe en ese mismo espacio, pero tiene un parante paralelo menos (en color rojo), ¿podrías ayudarlo a encontrar las medidas de este otro diseño?

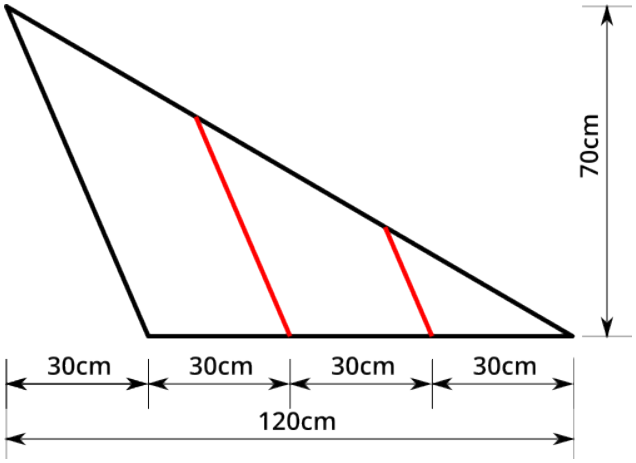


Figura 3.58: Otro diseño de la ventana. En este caso no se conoce el ángulo inferior izquierdo del triángulo, pero por construcción se sabe obtusángulo.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema de la ventana se divide en dos problemas similares, donde al parecer el segundo puede resultar más complejo de resolver. Según las imágenes, ambos tratan sobre una ventana con forma triangular, dividida en su interior por parantes (rojos) paralelos al lateral izquierdo. El problema pide determinar las medidas de cada uno de los parantes para cada ventana.

2. *Pensar una estrategia*: El problema está planteado de forma que los alumnos puedan establecer visualmente la comparativa entre triángulos semejantes, con la expectativa de que relacionen lados proporcionales entre triángulos y mediante una regla de tres simple puedan calcular cada uno de las longitudes de los parantes. Para esto los alumnos deben haber trabajado los principios de proporcionalidad entre triángulos semejantes, lo cual a veces se introduce de forma intuitiva sin aplicar el Teorema de Thales de forma explícita.

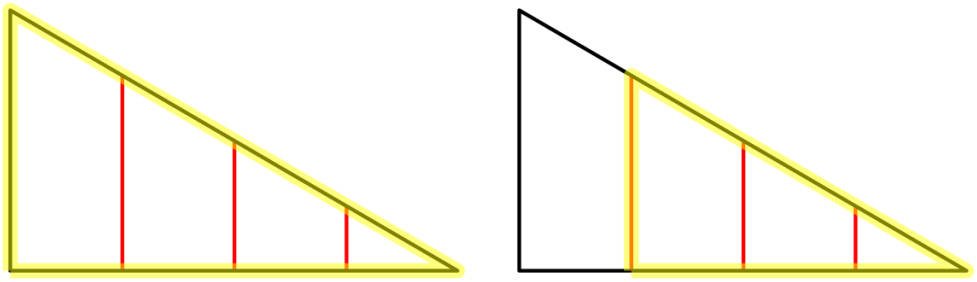


Figura 3.59: Triángulos semejantes dentro de la misma ventana. Se puede pensar algo similar para la segunda ventana.

   En caso de que los alumnos no hayan trabajado previamente con la proporcionalidad de los lados en triángulos semejantes el docente motivará a los alumnos para que representen y cuantifiquen los elementos del triángulo. Para la secuencia didáctica tomaremos este caso como estrategia principal. Con esto ellos podrán resolver de forma empírica el problema y luego el docente podrá trabajarlo en conjunto con la semejanza de triángulos en la etapa de validación.
   Por otra parte, entre las estrategias que los alumnos pueden pensar se encuentra la aplicación del Teorema de Pitágoras, que sin embargo no servirá para la resolución del problema, al menos no en su totalidad.

3. *Ejecutar el plan*: El docente sugerirá a los alumnos que dibujen en papel o en *GeoGebra* el diseño de la primera de las ventanas. Es deseable, desde lo didáctico, que las gráficas se realicen de forma individual, por ello si el docente planteó al inicio la formación de grupos deberá asegurarse de que los alumnos resuelvan individualmente.

Utilizarán la apariencia «Geometría» con la grilla activa y, opcionalmente, los ejes cartesianos activados. Como la ventana posee varias partes el docente podrá guiarlos si ellos no logran dibujarla correctamente, y les recordará que las medidas tienen que ser precisas.

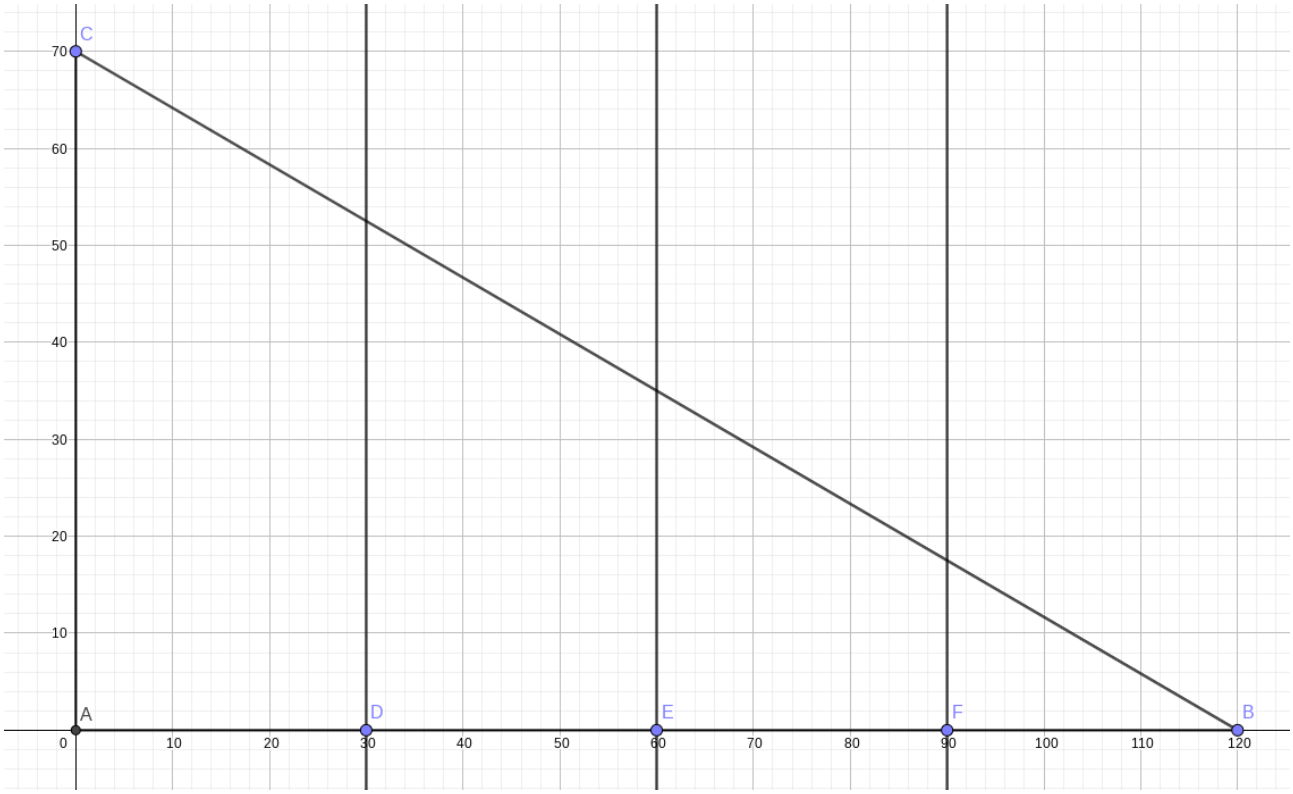


Figura 3.60: Al utilizar los ejes cartesianos como regla es mucho más fácil dibujar la ventana con las medidas exactas.

Una secuencia posible es marcar primero los tres puntos A, B, C, y luego los puntos D, E, F. Posteriormente se unen los puntos A, B, C con segmentos para obtener el triángulo marco. A continuación se marcan rectas paralelas a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos D, E, F y en sus intersecciones con la recta $\overleftrightarrow{BC}$ se determinan los puntos G, H, I que servirán como extremos para los segmentos de los parantes:

Figura 3.61: Luego de graficar los parantes se los coloreó de rojo y se les agregó la etiqueta con «Nombre y valor».

Con esto queda resuelto el cálculo de longitudes de los parantes para la primera de las ventanas, con las medidas l, m y n.
Con un procedimiento similar se pueden resolver las dimensiones de los dos parantes en la segunda de las ventanas:

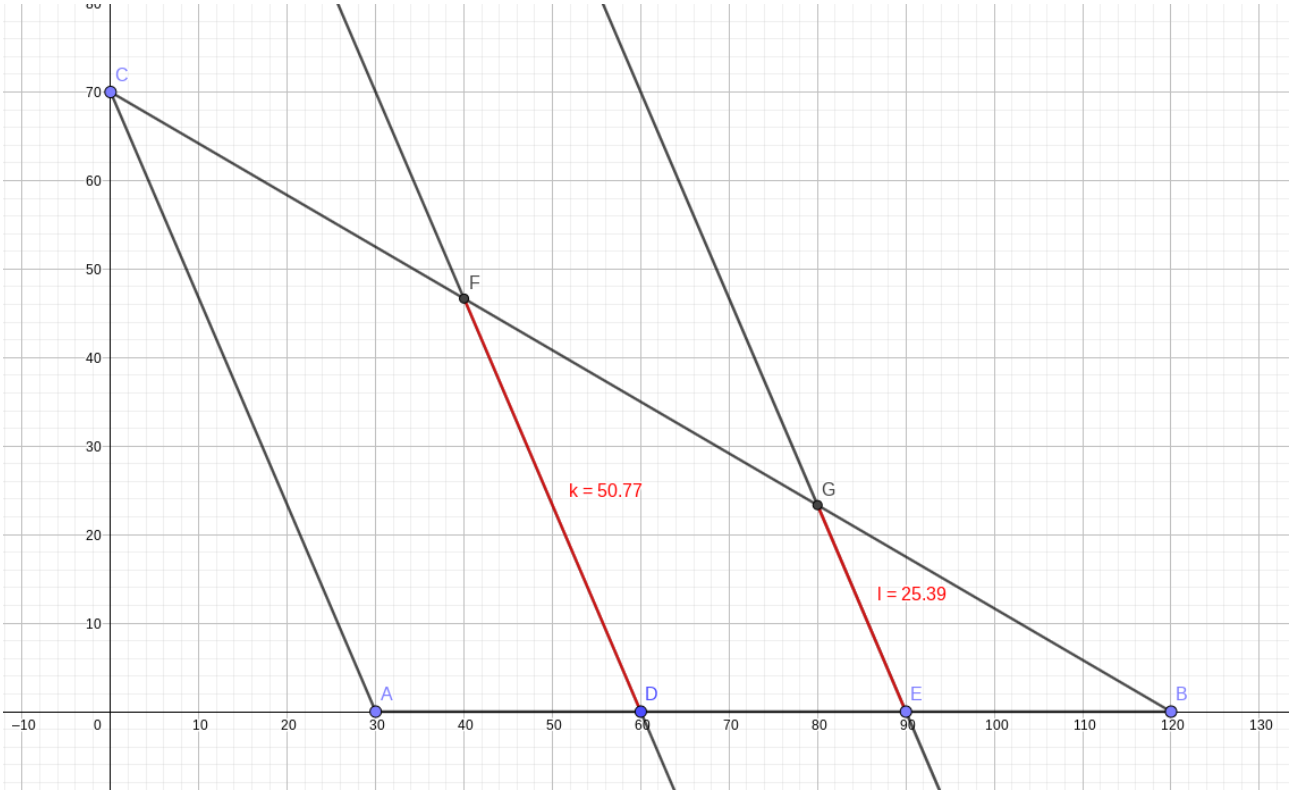


Figura 3.62: El segundo modelo de ventana tiene el lado inferior 30cm más pequeño y solo dos parantes.

Las medidas de las ventanas están en las etiquetas k y l, y son coherentes con lo que se esperaba. Queda entonces resuelto el planteo.

4. *Verificar y repensar la solución*: Siendo que la estrategia trata sobre dibujar, es esperable que los alumnos no lleguen a los mismos resultados por falta de precisión en el trazado de puntos y segmentos. El docente tomará nota de estas diferencias y tratará de hacerles descubrir los errores cometidos.
   Si la actividad se realizó en papel, aunque hayan sido muy cuidadosos con los trazados, es probable que existan diferencias entre resultados correctos debido a la falta de precisión natural que se tiene en este soporte. Para hacerles notar que los resultados están dentro de un margen aceptable de error, el docente podrá mostrarles en un proyector cómo se pueden construir las dos ventanas en *GeoGebra*, verificando las respuestas obtenidas. Esto puede ser de utilidad para detectar dónde se produjo el error: si en el marcado de medidas, en el trazado de paralelas, etc.

Validación

Para validar lo resuelto, el docente deberá introducir la semejanza de triángulos que como se explicó en la búsqueda de estrategias, es probable que no se haya trabajado aún con el grupo de alumnos desde la formalidad del Teorema de Thales.

Para comenzar, el docente trabajará con el primero de los triángulos, analizando las medidas calculadas, y resaltará a propósito la medida del segmento $m = \overline{EH} = 35cm$ planteando el siguiente interrogante: ¿Qué relación pueden encontrar entre esta medida y el resto de las medidas del marco de la ventana? ¿Existen otras relaciones similares?

Se espera que los alumnos logren identificar al segmento $\overline{EH}$ como la mitad del parante lateral izquierdo $\overline{AC}$, a la vez que relacionan $\overline{EB}$ como la mitad del segmento$\overline{AB}$.

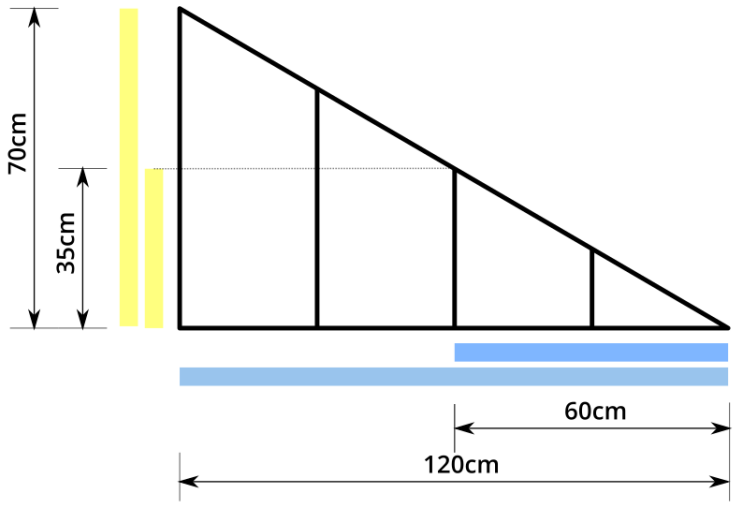


Figura 3.63: Los rectángulos de color amarillo y celeste representan las longitudes de los segmentos. Se observa la relación numérica entre ellos por color: uno es el doble del otro.

También es posible hacer lo propio con los segmentos l y n, donde la relación ya no será de $1:2$, sino de $3:4$ y $1:4$ respectivamente. Si bien puede calcularse, estas relaciones no son tan directas para descubrir.

El docente les preguntará entonces cómo son los triángulos que tienen esas medidas, y podrá aportar una idea más clara si en el pizarrón o en *GeoGebra* abstrae o desglosa de la representación de la ventana los dos triángulos involucrados: ¿Cómo son estos triángulos? ¿Sus formas son similares? ¿Cómo son los ángulos que los componen?

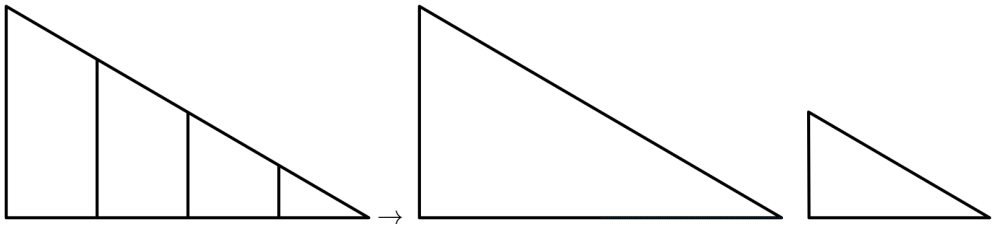


Figura 3.64: El triángulo mayor es el que ocupa todo el marco de la ventana. El menor es el que ocupa solo su parte derecha, desde la mitad de la base.

La razón de hacer estas preguntas es poder llegar a la conclusión de que los triángulos son «semejantes», en principio desde un concepto informal pero que el docente reforzará: Los dos triángulos parecen tener igual «forma», como si fuera que se hizo «zoom de 2x» (escala de factor 2) sobre uno de ellos para llegar al tamaño del otro.

En principio los dos triángulos son rectángulos por construcción, por lo tanto en cada uno de ellos hay un ángulo recto presente. Luego el ángulo inferior derecho es compartido por ambos, por lo tanto tienen la misma amplitud. Por diferencia según la suma de los ángulos internos de un triángulo[17] el ángulo restante, el superior izquierdo también miden lo mismo. En cuanto a los lados, sabemos que los parantes miden 70cm y 35cm, y los inferiores miden 120cm y 60cm respectivamente. Solo nos falta calcular las hipotenusas para corroborar lo que ya sospechamos, que uno va a medir el doble que el otro,en efecto:

- $\sqrt{(70cm)^2 + (120cm)^2} = 138.92cm$
- $\sqrt{(35cm)^2 + (60cm)^2} = 69.46cm$

El docente resaltará, entonces, que los triángulos son iguales en su forma por los ángulos pero los lados de uno de ellos miden la mitad que el otro. En la etapa de formalización se realizará una definición sobre las condiciones de semejanza de triángulos.

[17] Por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, se sabe que suman 180°.

Para reforzar lo analizado el maestro podrá mostrarles las construcciones de los dos triángulos, donde se pueden observar las medidas coincidentes para los ángulos correspondientes:

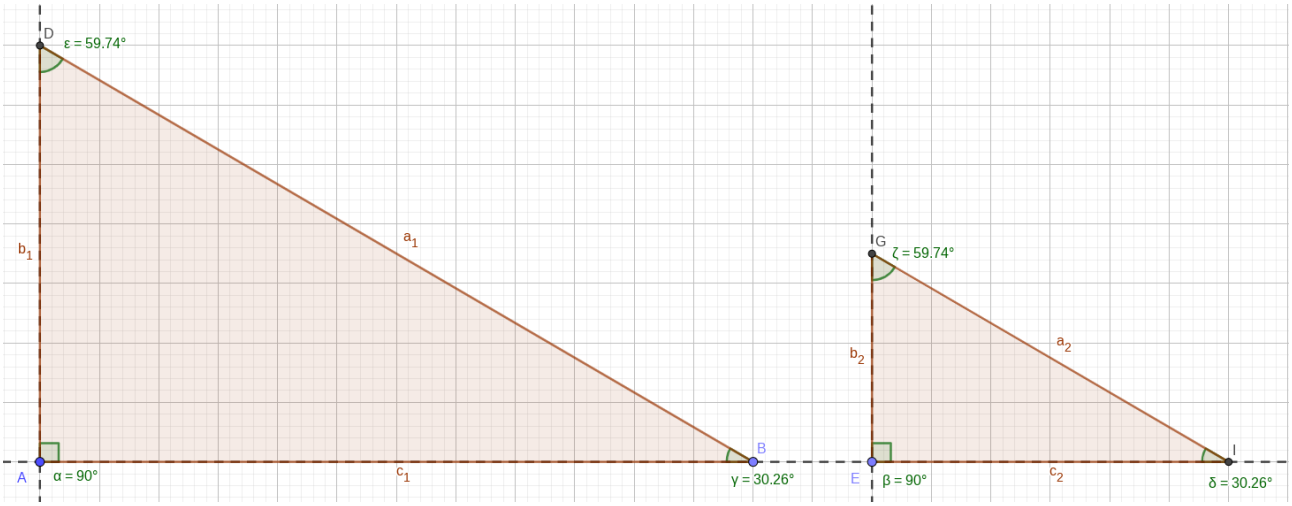


Figura 3.65: Los triángulos se construyeron según las medidas aportadas por el planteo.

Con esto podrá establecer la siguiente relación de proporcionalidad entre los lados de ambos triángulos, que los alumnos podrán corroborar con las medidas halladas en la etapa de resolución:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

En el caso de los triángulos analizados es:

$\frac{138,92}{69.46} = \frac{70}{35} = \frac{120}{60} = 2$

Pero también se pueden armar otras relaciones, dos a dos, que son fácilmente comprobables para los triángulos analizados:

$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$, es decir $\frac{70}{120} = \frac{35}{60}$, o

$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$, es decir $\frac{138,92}{120} = \frac{69,46}{60}$

El docente les planteará si con estas relaciones pueden hallar las hipotenusas de los otros triángulos, cuyas bases miden 90cm y 30cm:

$\frac{138,92}{120} = \frac{x}{90} \Rightarrow x = 104,19cm$, y

$\frac{138,92}{120} = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 34,73cm$

Los alumnos podrán corroborar estos cálculos midiendo en sus dibujos en papel o en *GeoGebra*.

Ahora les propondrá calcular todas las medidas de la segunda ventana, utilizando las relaciones de proporcionalidad entre los lados de los triángulos que puedan reconocer. Lo primero que deberán calcular es la medida del parante izquierdo, que podrán hacerlo con el Teorema de Pitágoras:

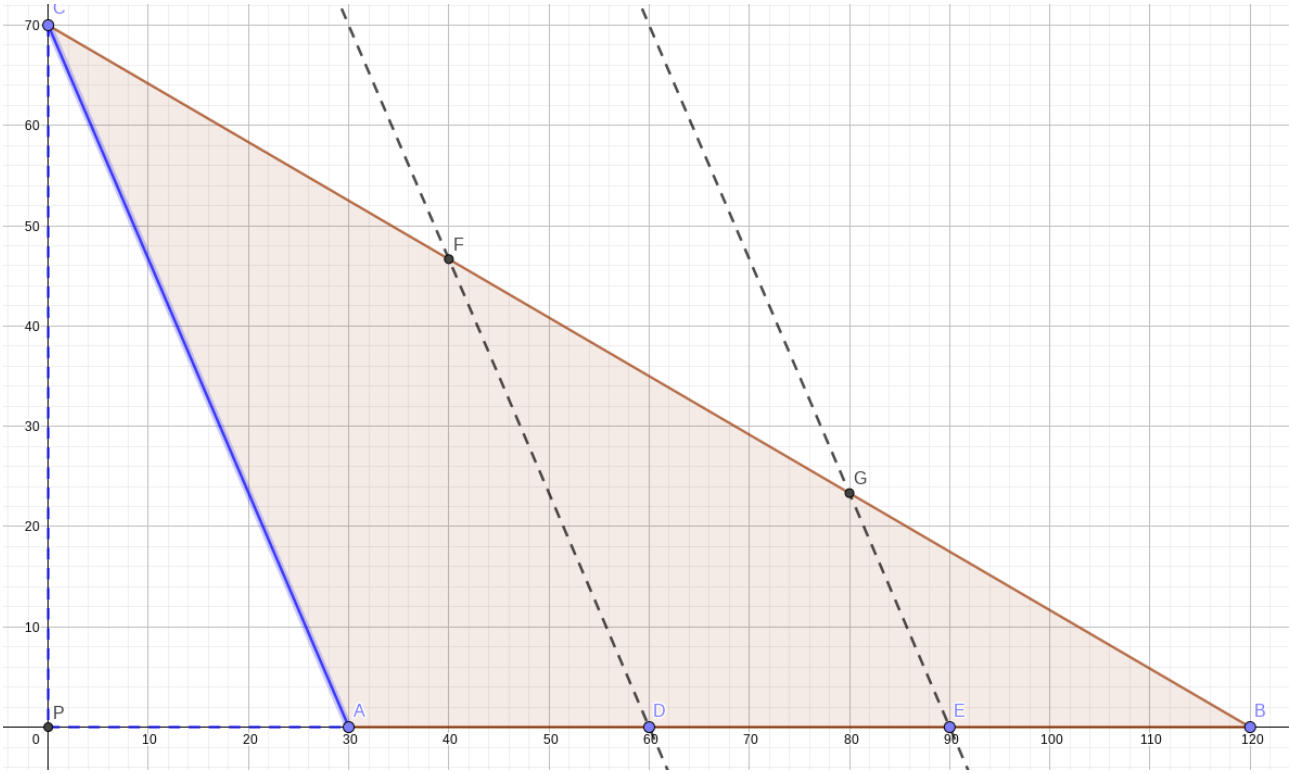


Figura 3.66: Primero se trata de calcular la longitud de la hipotenusa del triángulo azul, que servirá como dato para el calculo de las proporciones de los otros parantes.

Entonces, $\sqrt{30^2 + 70^2} = 76,16cm$. Luego se procede a calcular los parantes interiores $\overline{DF}$ y $\overline{EG}$:
$\frac{76,16}{90} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 50,77cm$, y
$\frac{76,16}{90} = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 25,39cm$
Esto coincide con lo calculado/medido en la etapa de resolución, lo cual valida el procedimiento. Como ejercicio y práctica también podrán calcular las hipotenusas de los triángulos que forman los parantes interiores.

Formalización

La propiedad hallada se conoce actualmente como teorema de Thales[18] y establece que *si una línea recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros dos lados, forma un nuevo triángulo que es semejante al original, es decir, sus ángulos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales.*

[18]Thales de Milesios es la versión griega de su nombre, sin embargo autores actuales lo nombran simplemente como Tales de Mileto

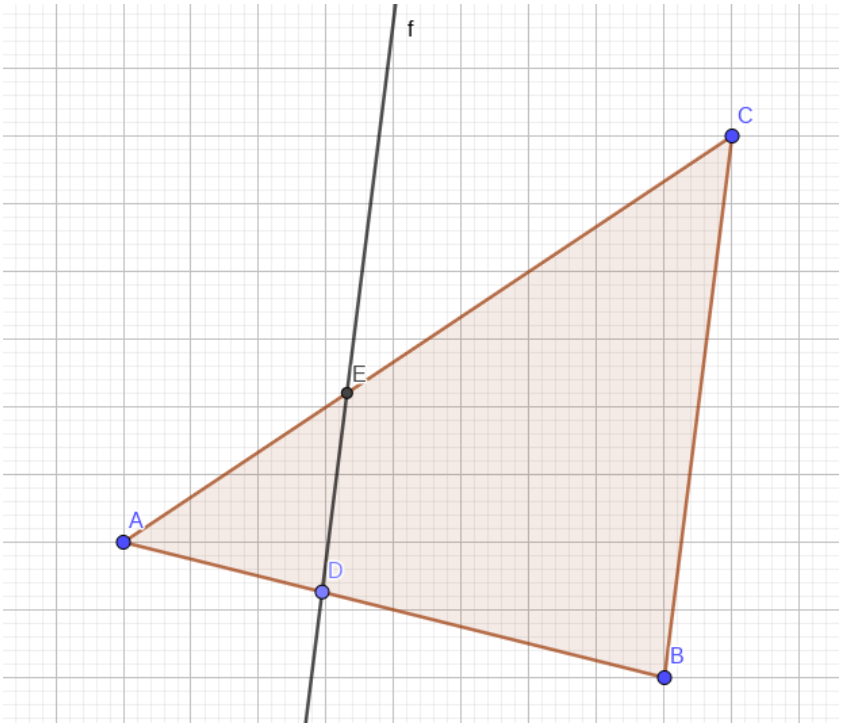


Figura 3.67: En la gráfica, los dos triángulos son *semejantes*. Es decir, $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE}$.

Una forma de expresar esta semejanza es mediante la expresión de proporcionalidad entre los lados de los triángulos como una igualdad encadenada:
$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$
o también, como expresiones individuales mediante la constante de proporcionalidad k:
$AD = k.AB; AE = k.AC; DE = k.BC$

El teorema se puede reformular y generalizar a más de una paralela: *si varias paralelas cortan dos transversales, los segmentos que se forman en ambas transversales son proporcionales entre sí.*

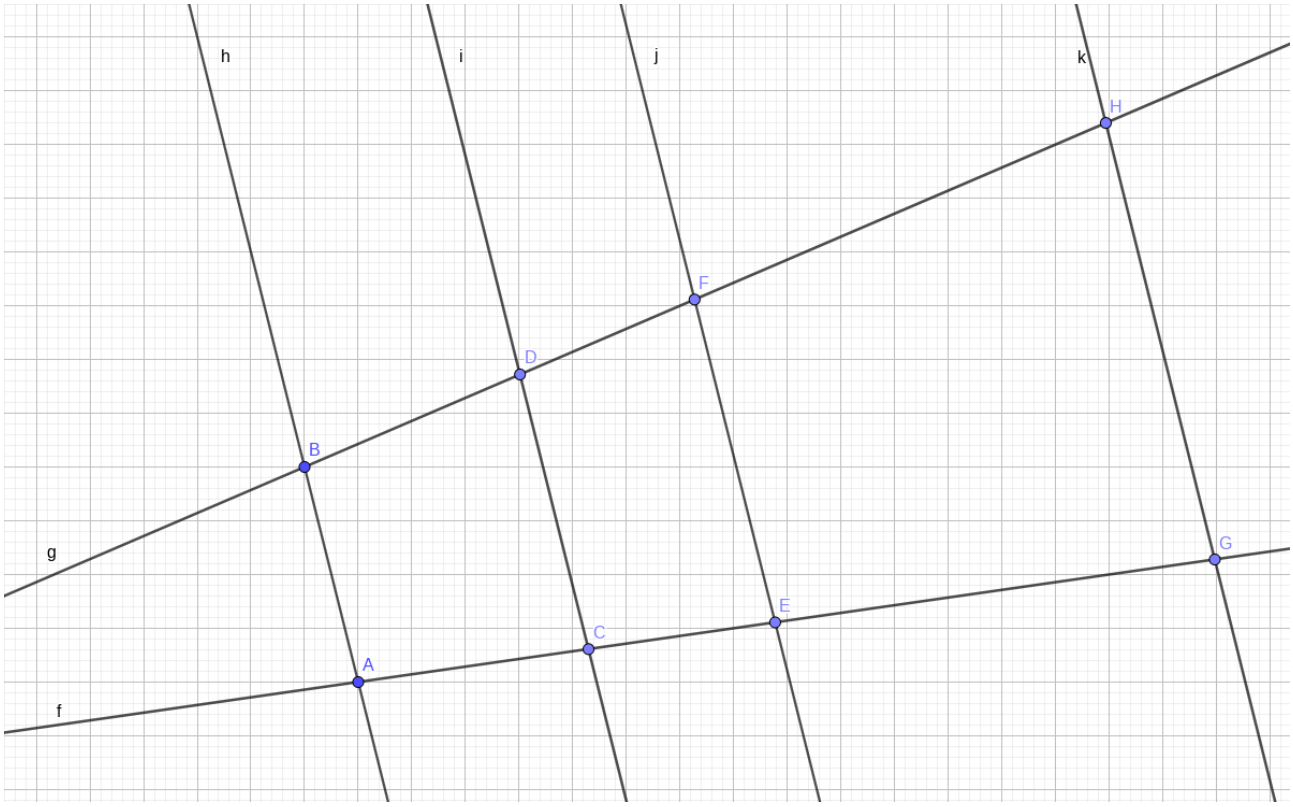


Figura 3.68: Los segmentos generados por las paralelas h, i, j entre las rectas f y g son proporcionales.

En este caso es posible establecer múltiples expresiones de proporcionalidad:
$\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF} = \frac{EG}{FH}$
O también otras relaciones entre segmentos correspondientes entre las rectas f y g:
$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF}$

Thales de Mileto fue uno de los famosos siete sabios de *Grecia*, vivió entre los años c. 624 a. C. y 546 a. C. Fue un filósofo, matemático, geómetra, físico y legislador griego. Vivió y murió en *Mileto*, polis griega de la costa *Jonia*, en *Asia Menor* (actual *Turquía*). Se cuenta de él una anécdota sobre el cálculo de la altura de la pirámide de *Keops* (*Rey Khufu*): Un sacerdote egipcio le pregunta si él conoce su altura, a lo que luego de pensar por un momento *Thales* se echa sobre la arena y determina la longitud de su propio cuerpo, luego les explica: «Me pondré simplemente en un extremo de esta línea, que mide la longitud de mi cuerpo y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide de vuestro Rey también ha de medir tantos pasos como la altura de la pirámide.».

Figura 3.69: La Gran Pirámide de Guiza (también conocida como pirámide de Keops o de Jufu).
Fuente: Por Nina - Trabajo propio, CC BY 2.5

Este problema puede ser de utilidad para que los alumnos expliquen el teorema, argumentando con lo trabajado en el planteo: ¿Cuál es la altura aproximada de la pirámidede Keops si Thales medía $1,72m$ de altura, su sombra a cierta hora era de $2,36m$ y en el mismo momento la sombra de la pirámide era $200m$?

3.2. Vectores

3.2.1. Suma de vectores

Nombre: Un clásico modelo matemático de fuerzas concurrentes en $R2$.

Resumen: La actividad plantea mediante un problema clásico de interacción de fuerzas aplicadas sobre un punto, dando lugar a la suma de vectores concurrentes.

Objetivo: Suma geométrica y algebraica de vectores.

Saberes: Sistemas de ejes cartesianos, definición y concepto de vector, componentes de vectores, módulo y ángulo.

Edad: 15 a 17 años.

Preparación En esta actividad se utilizan las formas polar y cartesiana de vectores. Es necesario que el docente tenga presente que *GeoGebra* permite trabajar de forma transparente entre estas dos formas desde la vista algebraica, mostrando siempre las coordenadas de los vectores en dicha vista. También es necesario remarcar que es posible acceder a las componentes de los vectores haciendo uso de los comandos $x()$ e $y()$.

Planteo

Tres lanchas remolque tiran de un barco pesquero en las aguas de un puerto, para llevarlo a su dársena correspondiente. La primera tira de adelante, la segunda del lado izquierdo con un ángulo de 30° respecto a la primera. La tercera tira del lado derecho, con un ángulo de 45° grados. Cada una de ellas aplican una fuerza de una tonelada. ¿Cuál es la fuerza resultante? ¿Cuál es el ángulo de desvío respecto al eje principal de remolque?

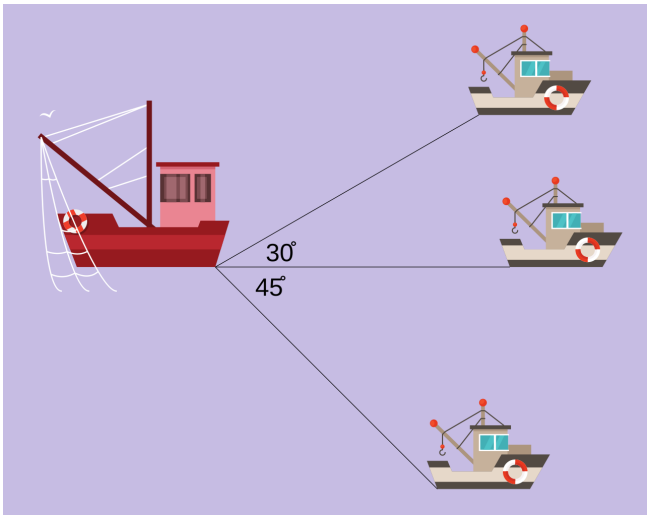


Figura 3.70: Las imágenes de los barcos se obtuvieron de la página de *FreePik©* bajo licencia libre.

Esta secuencia ha sido pensada para ser trabajada íntegramente con el programa *GeoGebra*, utilizando sus herramientas con la idea de construir desde allí el concepto de suma de vectores, en particular el método de la poligonal. En todo momento el docente guiará a sus alumnos con las indicaciones necesarias en el uso de cada herramienta.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema trata sobre un barco que es remolcado por tres botes con igual fuerza, pero distintos ángulos de tiro. Para trasladar el esquema a *GeoGebra*, los alumnos graficarán primero los ángulos y luego los vectores. En primer lugar se marcaron los puntos A y B, luego con la

herramienta «Ángulo dada su amplitud», se graficaron los ángulos de 30° y 35° de acuerdo al esquema del problema.

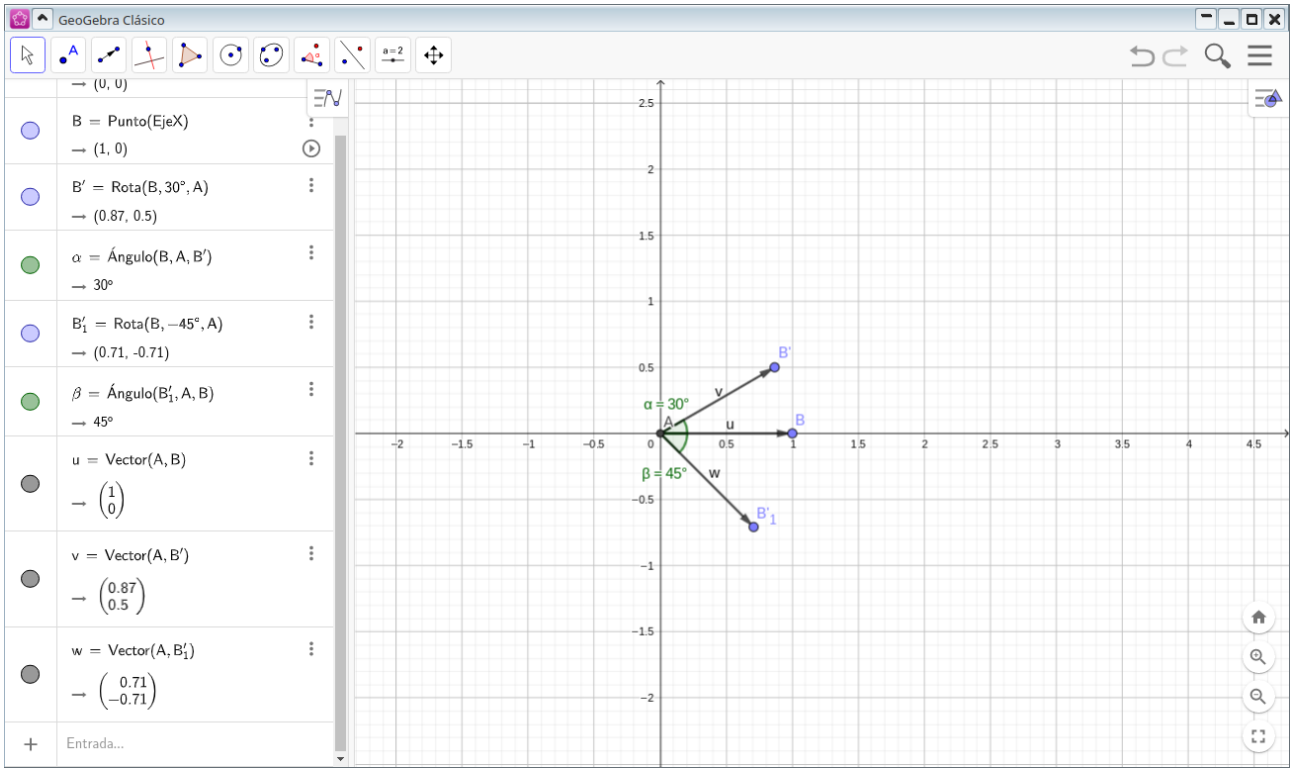


Figura 3.71: Esquema del problema, en *GeoGebra*. Los puntos B, B' y B'_1 representan las lanchas remolques. Los Vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ representan las fuerzas de cada lancha.

Nótese que se eligió el primer punto B de longitud 1, deliberadamente. De esta forma se construyen los 3 vectores del problema [19].

2. *Pensar una estrategia*: Una vez que los alumnos han logrado dibujar el modelo en *GeoGebra* el docente motivará el surgimiento de estrategias con preguntas que simplifiquen el problema a formas más intuitivas: ¿Qué pasaría si las tres fuerzas fueran colineales, es decir si los tres barcos tiraran en una misma dirección? ¿Y si dos barcos intentaran remolcar el barco pero con sentidos opuestos?
   Los alumnos podrán llegar a la conclusión de que una fuerza detrás de la otra, en la misma dirección y sentido, darían una suma total de 3 toneladas, como si se tratara de tres flechas que se disponen en fila. El docente sugiere utilizar esta misma idea como estrategia, es decir, intentar poner los tres vectores de forma que donde termina uno comienza el otro, como si fueran indicaciones que indican desplazamiento de un punto a otro. Una vez logrado se podrá calcular la magnitud y el ángulo del vector resultante para dar respuesta a las preguntas.

3. *Ejecutar el plan*: El docente les enseñará a los alumnos a utilizar la herramienta vector «Equipolente» para generar una copia de un vector existente, pero con la idea de «encadenar» uno con otro de acuerdo a la estrategia planteada:

[19] Hay que decir que *GeoGebra* ofrece otra forma más práctica de marcar vectores dados su ángulo de dirección y magnitud, que es con el comando $Vector((magnitud; angulo°))$.

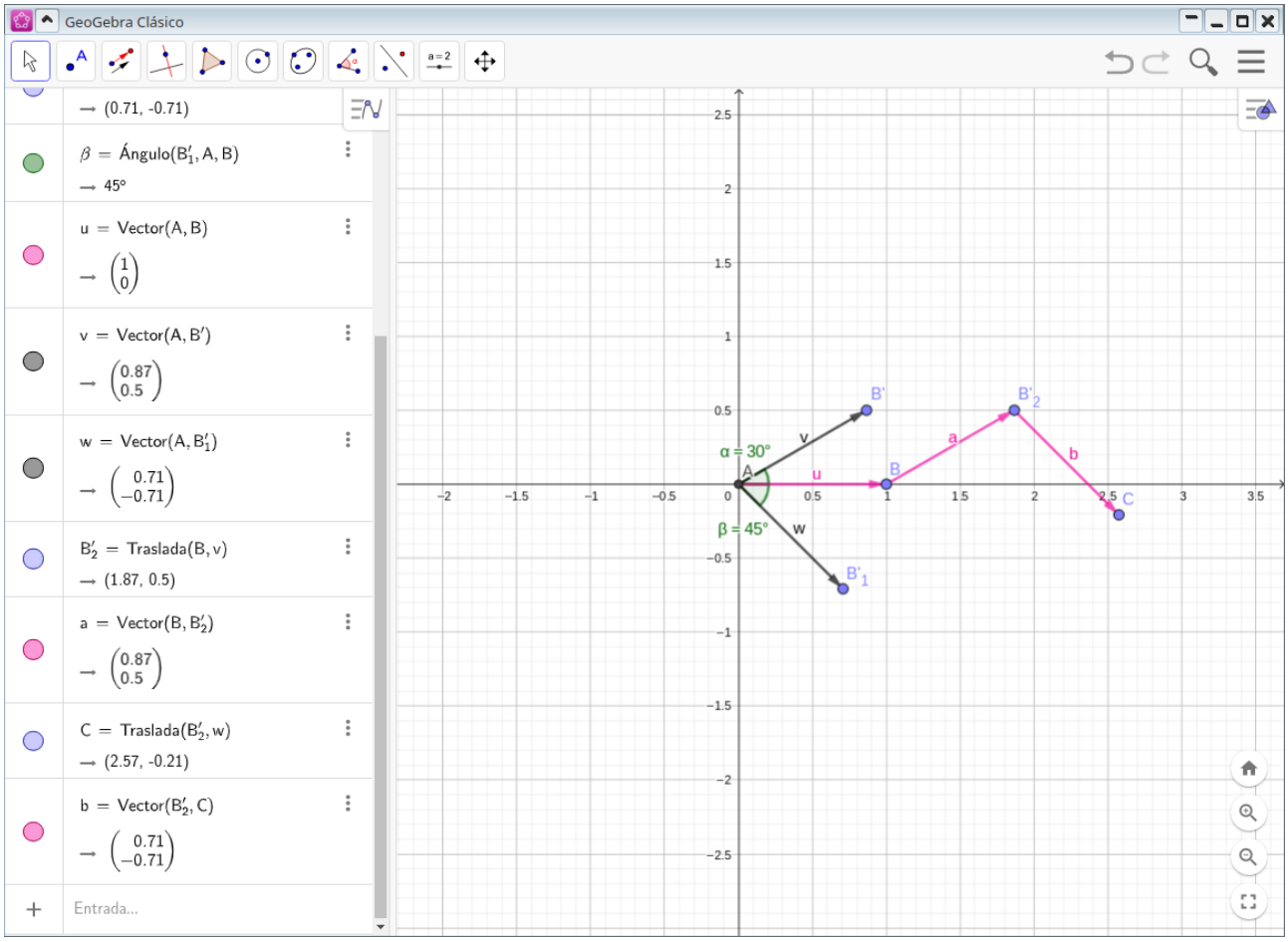


Figura 3.72: El vector $\vec{a}$ es una copia de $\vec{v}$ que comienza en el extremo de $\vec{u}$. El vector $\vec{b}$ es copia de $\vec{w}$ en el extremo del vector $\vec{a}$.

Luego nos queda generar el vector que inicia en el origen y finaliza en el punto C, que es el extremo de la cadena de vectores.

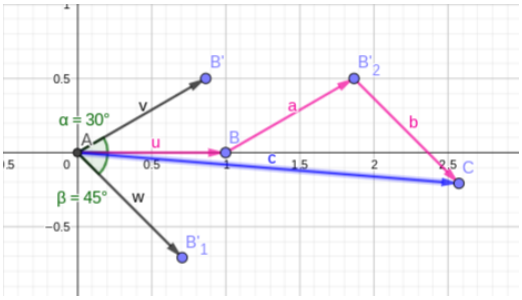


Figura 3.73: $\vec{c}$ es el vector resultante, en azul.

El ángulo puede medirse con la herramienta de *ángulo* y el *módulo* del vector podría medirse con la herramienta de distancia. Sin embargo es más sencillo utilizar los comandos $abs(a)$ y $arg(a)$ para calcular *módulo* y *ángulo* respectivamente.

Figura 3.74: Las funciones *abs*() y *arg*() devuelven, respectivamente, el *módulo* y el *ángulo* del vector $\overrightarrow{c}$.

El vector resultante indica una leve desviación de 4.6°, y una fuerza total de 2.58 toneladas.

4. *Verificar y repensar la solución*: El docente podrá hacerles verificar el resultado recordándoles que un vector se puede descomponer en su componentes. Les propondrá que sumen las componentes horizontales de cada vector por un lado y las verticales por otro. Para ello se pueden emplear los comandos $x()$ e $y()$, que devuelven las componentes de los vectores:

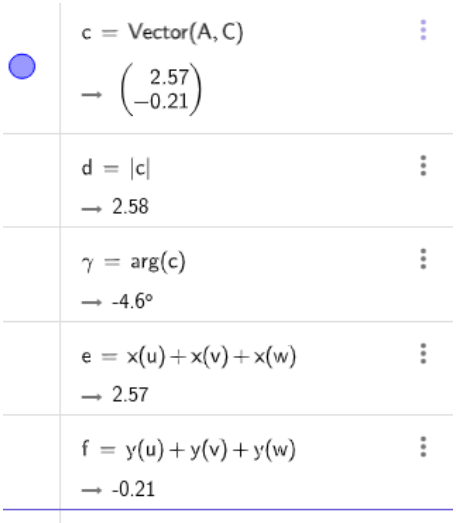


Figura 3.75: Suma de las componentes de los tres vectores.

Al comparar estas sumas con las componentes del vector $\overrightarrow{c}$, vemos que coinciden. Además, si se quiere, podría verificarse el valor del módulo del vector aplicando el *Teorema de Pitágoras*.

Validación

Podemos validar este procedimiento desde *GeoGebra*, realizando la suma directa de vectores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, y comparar este resultado con el obtenido anteriormente.

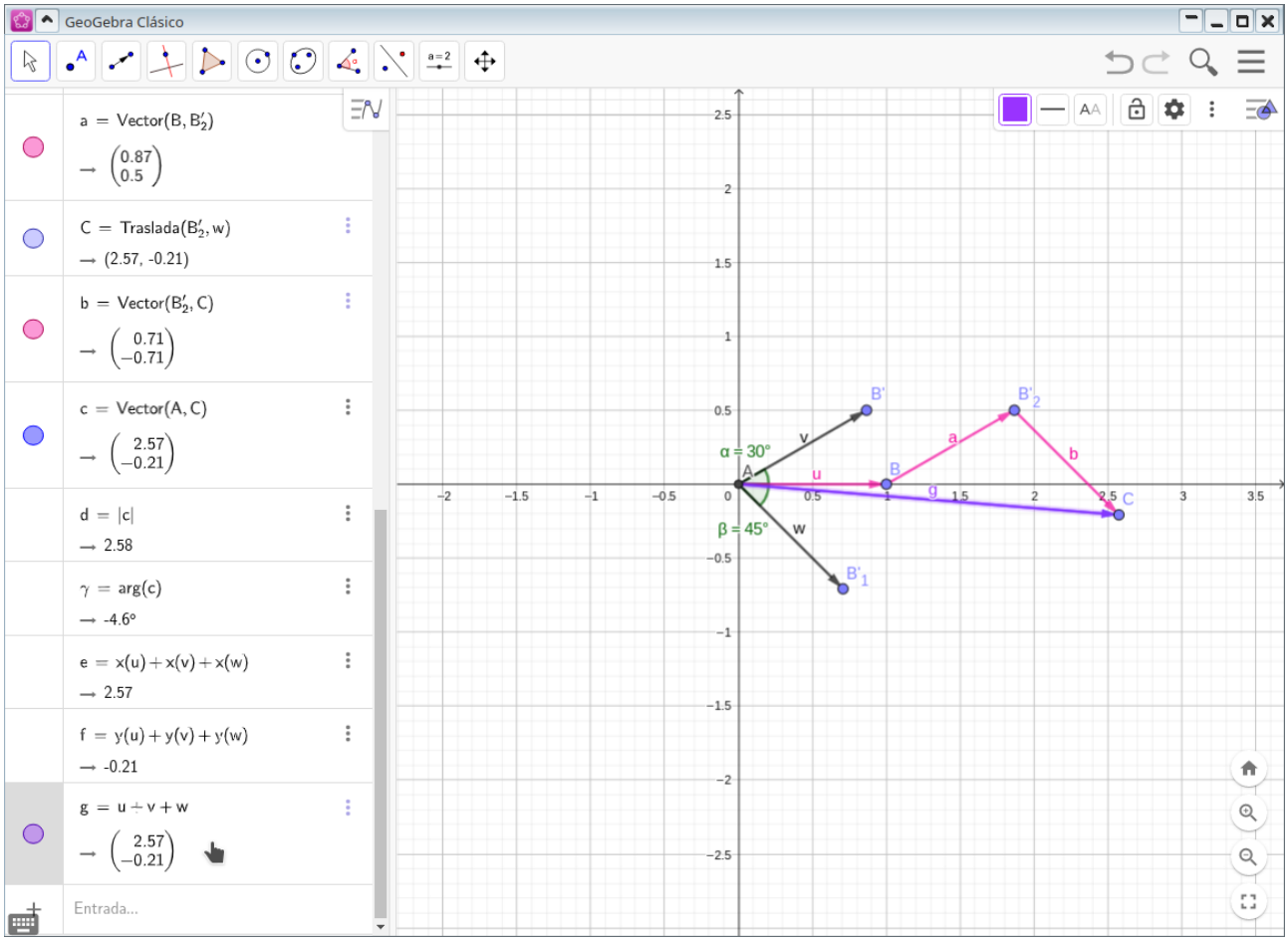


Figura 3.76: La suma directa de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ da como resultado el vector $\overrightarrow{g}$, que coincide con el vector $\overrightarrow{c}$, calculado mediante encadenamiento.

Para afianzar este concepto se pueden construir tres o más vectores de extremos libres y realizar la suma encadenada de los mismos, de forma que podamos corroborar la suma dinámicamente al mover los puntos a distintas coordenadas:

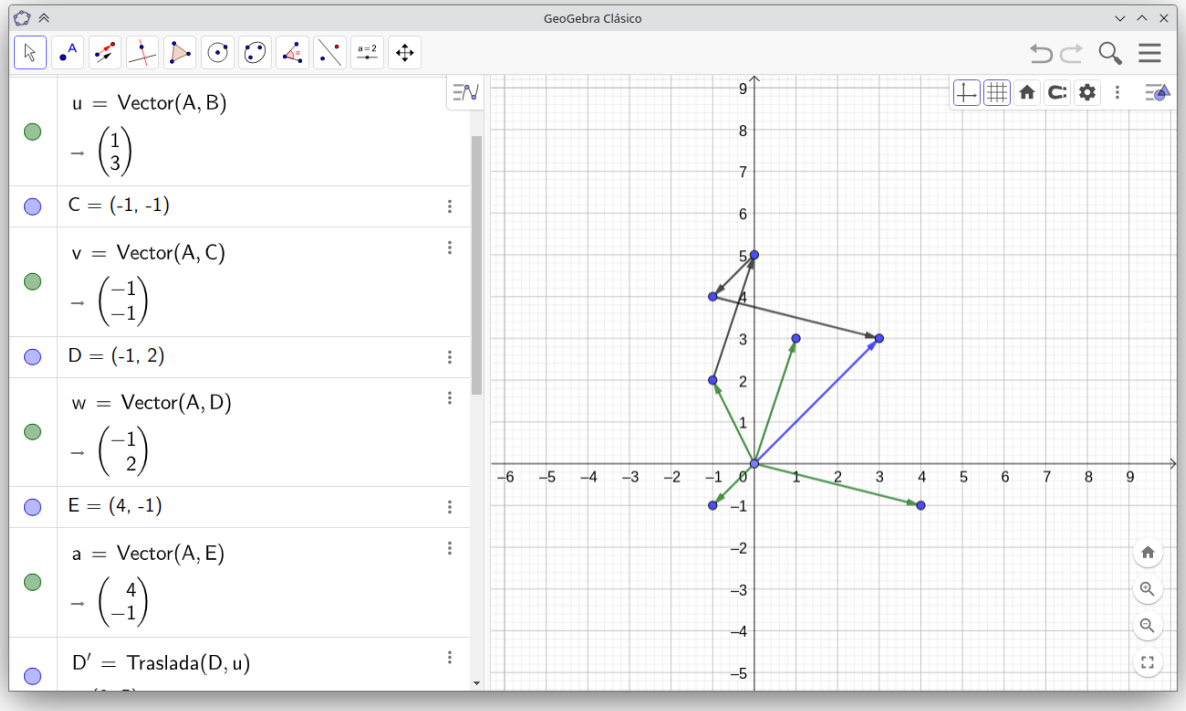


Figura 3.77: En este caso se han sumado cuatro vectores (verdes). Al mover los puntos extremos de cualquiera de ellos observamos como cambia el vector suma (azul).

Formalización

El método de encadenamiento de vectores de extremo a extremo empleado en la resolución es conocido como *Método de la poligonal*, y consiste en disponer un vector a continuación de otro, ordenadamente, de forma que el origen de cada uno de los vectores coincida con el extremo del siguiente. La resultante es aquella cuyo origen coincide con el origen del primer vector y culmina en el extremo del último.

El método empleado para verificar la suma mediante las componentes de horizontales y verticales se conoce como *Método analítico:*

$a + b = c \Leftrightarrow x(a) + x(b) = x(c)$ y $y(a) + y(b) = y(c)$

Asimismo, a partir de esta lógica se pueden deducir la operación entre escalar y vector como la suma sucesiva de vectores de igual *magnitud*, *módulo* y *sentido*, obteniendo por resultado que $n \times a = b \Leftrightarrow n \times x(a) = x(b)$ y $n \times y(a) = y(b)$

La resta es consecuencia de esta última deducción ya que $a - b = a + (-1) \times b$.

3.3. Trigonometría

3.3.1. Razones trigonométricas

Nombre: Las razones trigonométricas.

Resumen: El problema plantea la necesidad de establecer relaciones entre los lados de los triángulos rectángulos para poder calcular el lado faltante. Esto deriva en el cálculo del lado faltante de un lado en un triángulo rectángulo conociendo un lado y un ángulo mediante la aplicación de razones trigonométricas.

Objetivo: Entender el concepto de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Saberes: Ángulos, Triángulos rectángulos, Semejanza de triángulos.

Edad: 14 a 15 años.

Preparación La actividad no requiere uso de herramientas especiales más que graficación de puntos y semirrectas en la vista gráfica.

Planteo

Juan Pablo quiere calcular la altura aproximada del edificio donde vive y se le ocurre una idea para hacerlo utilizando su sombra, aprovechando una propiedad que estudiaron recientemente en la escuela respecto de los triángulos isósceles. Él sabe que un triángulo rectángulo isósceles posee dos ángulos de 45°, y que ellos se oponen a lados iguales, entonces va a esperar a que el sol proyecte una sombra de esa amplitud y así sabrá que el edificio mide igual de altura que su sombra proyectada en el suelo. Con la ayuda de una hoja de papel, lápiz y un transportador mide el ángulo de la sombra.

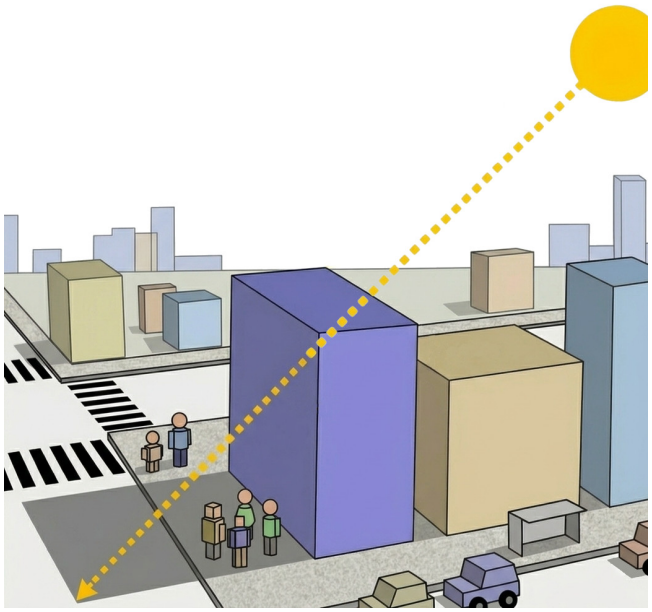


Figura 3.78: El edificio y su sombra generan un triángulo rectángulo isósceles virtual.

Juan Pablo no quiere esperar a que el sol se ubique en la posición justa y se pregunta si existe alguna manera de resolver este problema de otra forma... ¿Podrías ayudarlo?

Él sabe que si los rayos del sol forman un ángulo de 60° con el suelo, entonces la longitud de la sombra desde la base del edificio es de $15m$. En cambio, si la sombra mide $40m$, el ángulo es de 33°.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema nos habla de un edificio, y su sombra, que genera triángulos rectángulos con la luz del sol en el transcurso del día. Está planteado de una forma que permite entender que existe una solución única al problema, ya que la idea inicial del triángulo isósceles es realmente un método que da respuesta al problema. Sin embargo no tenemos el dato de la longitud de la sombra a 45°, sino a 60° y 33°, en $15m$ y $40m$ respectivamente.

2. *Pensar una estrategia*: La estrategia más inmediata tiene que ver con la construcción de los triángulos mencionados. En papel tendríamos que dibujarlos en escala, pero con *GeoGebra* es mucho más fácil.

3. *Ejecutar el plan:* En un archivo nuevo de *GeoGebra* marcamos los puntos $A = (0, 0)$, $B = (0, 15)$ y $C = (0, 40)$. El eje horizontal representa el suelo, y el vertical la altura del edificio:

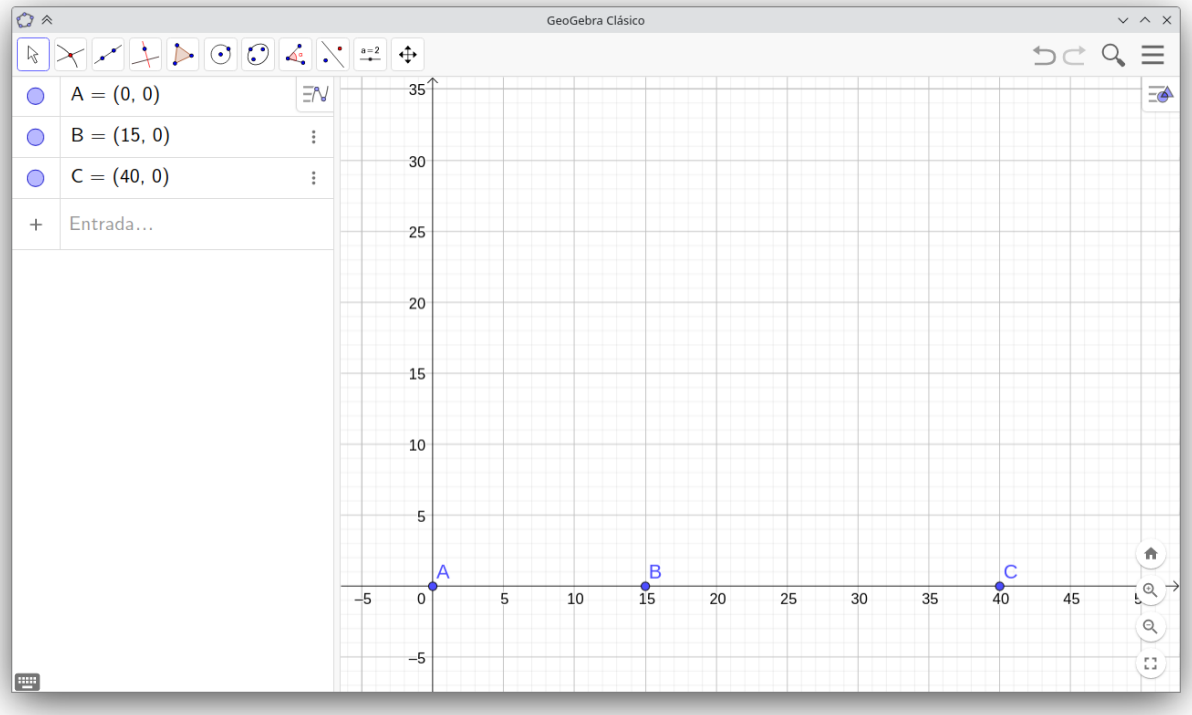


Figura 3.79: El punto A representa la base del edificio, el B es la sombra a 60° y el C a 33°.

Ahora marcamos los ángulos de 60° y 33°, usando la herramienta «Ángulo dada su amplitud». Además marcamos semirrectas desde los puntos B y C hacia A' y A'' respectivamente:

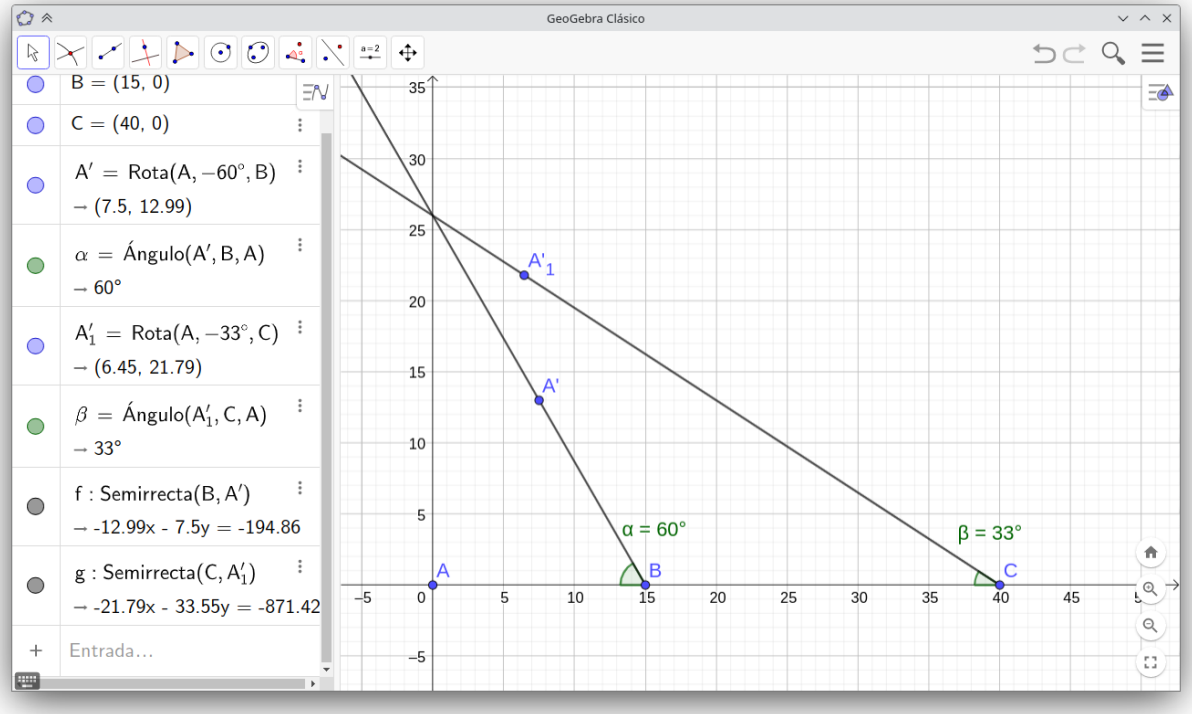


Figura 3.80: Las semirrectas $\overrightarrow{BA'}$ y $\overrightarrow{CA'_1}$ representan las sombras a distinta hora del día. Ambas confluyen, aparentemente, en un mismo punto sobre el eje vertical en el valor 26.

Con la herramienta «Intersección», marcamos el punto D que es precisamente la intersección entre una cualquiera de las semirrectas y el eje vertical:

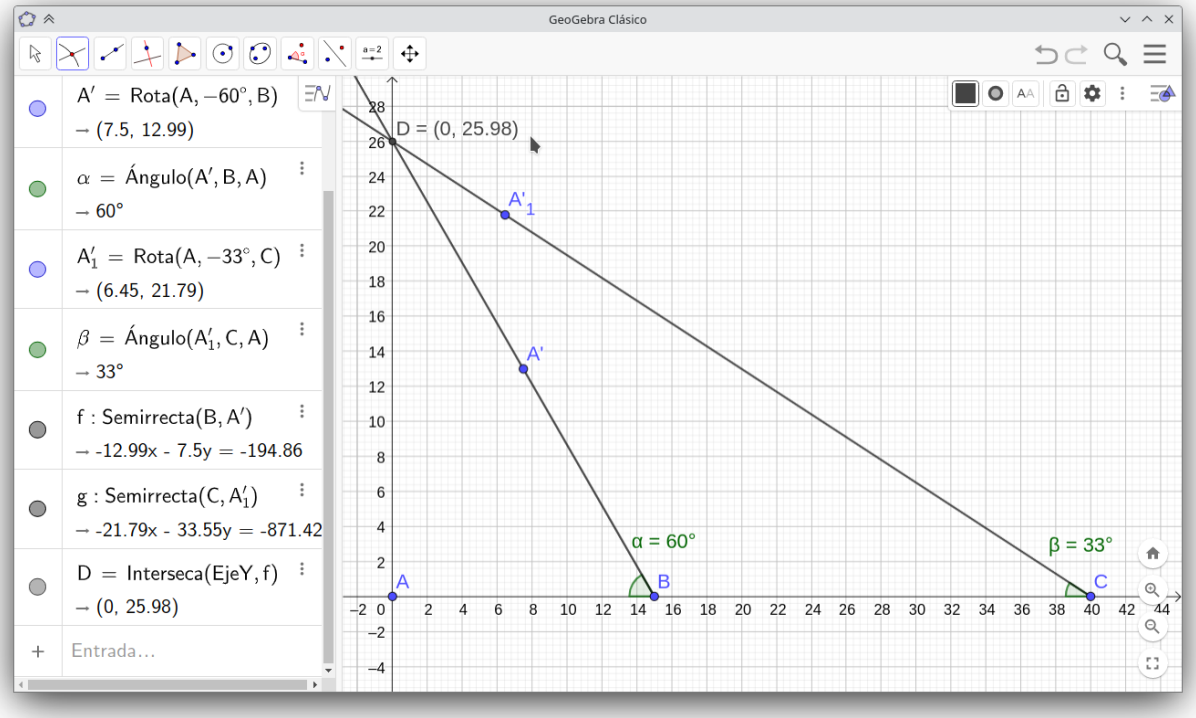


Figura 3.81: La intersección da como resultado un punto de coordenada $y = 25.98$, es decir casi $26m$.

Ahora sabemos que la altura del edificio es aproximadamente $26m$.

4. *Verificar y repensar la solución.* Verificamos el resultado haciendo la intersección de la otra semirrecta y el eje vertical. Además podemos saber que si el edificio mide $26m$ de altura, cuando la sombra sea de 45° entonces su longitud será también de $26m$.
   A raíz de esto podríamos incluso explorar otros ángulos y longitudes de sombra, y analizar si existe alguna relación entre estos valores. El docente podría indagar sobre esta relación y al final mostrar la relación entre estas dos variables, llevando a la conclusión que a mayor longitud de sombra, menor será el ángulo proyectado.
   Es probable, y quizás deseable, que algún alumno intente hallar alguna relación de proporcionalidad numérica entre longitudes y ángulos. El docente debería motivar a que esto suceda disparando preguntas como ¿Para un edificio de la mitad de altura será también su sombra la mitad? ¿Y si es el doble de altura? ¿Existirá una relación que nos permita, sin dibujar, encontrar el valor de los lados del triángulo rectángulo conociendo un ángulo y un lado?

Validación

Todo este planteo deja entrever que es posible una resolución analítica, y para ello haremos uso de los triángulos rectángulos semejantes. En esta etapa intentaremos encontrar una relación entre triángulos semejantes.

Podemos separar el alumnado en varios grupos, y a cada uno de ellos le tocará explorar rectángulos semejantes de ángulo base 60°, 45°, 30° y 15° (más valores, mejor). El objetivo de esta actividad será generar triángulos con longitud de base $1cm$, $3cm$, $5cm$ para cada uno de esos ángulos de base, para luego estudiar las relaciones de proporcionalidad entre los lados de los triángulos:

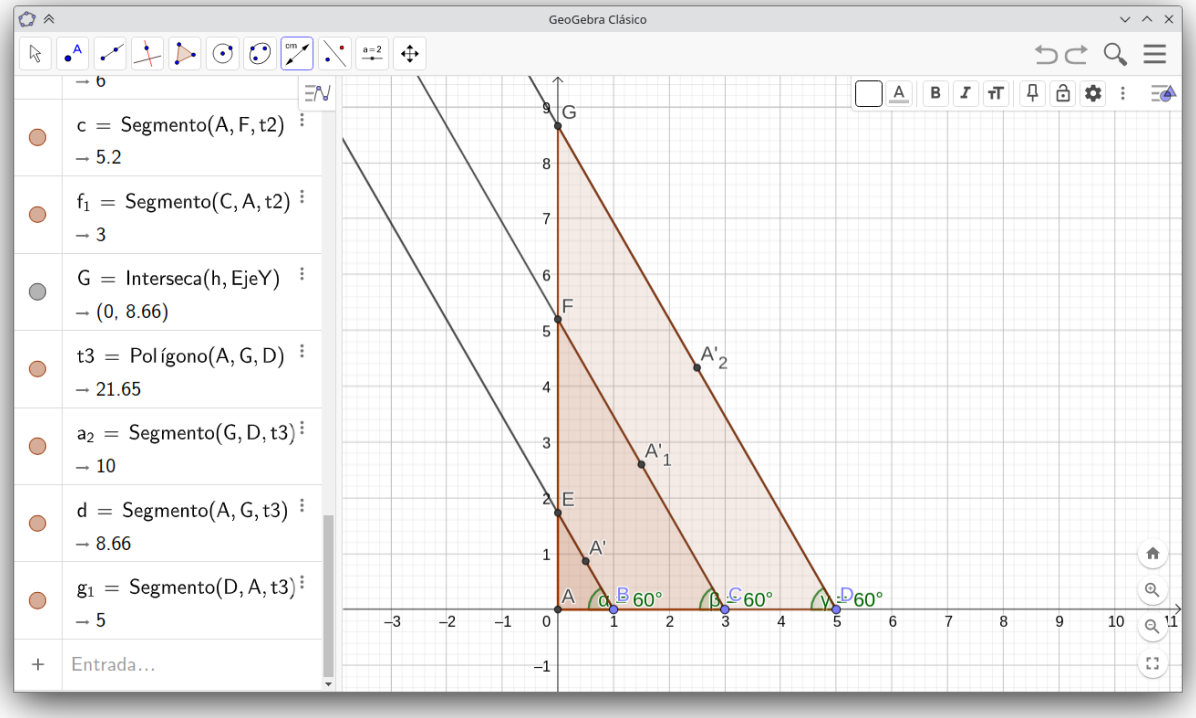


Figura 3.82: Los tres triángulos son semejantes, por lo tanto sus lados correspondientes guardan proporcionalidad.

Ahora analizaremos las razones entre los catetos de cada triángulo, para entender si existe algún patrón o regularidad:

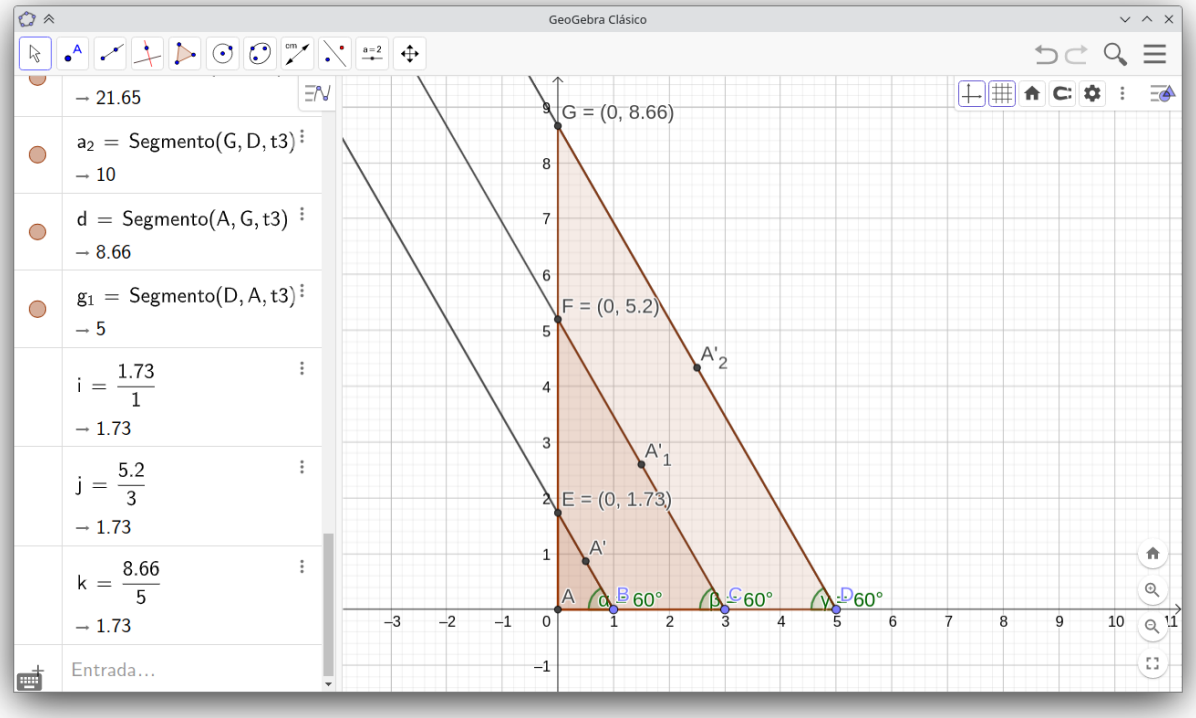


Figura 3.83: Los cocientes i, j, k son la razón entre el cateto vertical y el horizontal de cada triángulo. Importante: Los valores calculados han sido redondeados a dos decimales, por lo que los resultados pueden ser aproximados para otros triángulos.

Se observa que efectivamente existe una relación de proporcionalidad para todos los triángulos rectángulos de ángulo base 60°. Lo mismo sucede con los demás valores de ángulo base.

Ahora podemos usar ese valor para encontrar analíticamente la altura del edificio para cuando la sombra se genera con un ángulo de 60°. Sabiendo que cualquiera de estos triángulos es proporcional al problema del ejemplo, entonces:

$altura\,triángulo/base\,triángulo = altura\,edificio/sombra\,edificio$, o sea $1.73/1 = altura\,edificio/15m \rightarrow 1.73 \times 15m = 1 \times altura\,edificio$

Por lo tanto, la altura del edificio da como resultado $25.95m \simeq 26m$.

Se puede realizar el mismo cálculo con los otros triángulos para comprobar que con cualquier ángulo se puede hallar analíticamente el valor de la altura del edificio.

Con este procedimiento hemos validado una forma de resolver el problema mediante triángulos semejantes. Entonces, por ejemplo, ante un problema similar donde se tenga como dato un triángulo rectángulo, un ángulo y un lado podemos dibujar en un papel un triángulo semejante al original en menor escala y luego establecer una proporcionalidad entre éstos.

Pero, ¿y si tuviéramos una tabla con los valores entre las razones de los lados para todos los triángulos con valor de ángulos base entre 0° y 90°? De esta forma no necesitaríamos dibujar triángulos a escala, ya que la tabla nos daría el valor de proporcionalidad para cada valor de ángulo base...

Formalización

El docente deberá en esta etapa, formalizar el concepto anterior:

«La *tangente* de un ángulo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente».

Para el caso de estos triángulos tratados en la etapa de validación, la *tangente* de 60° tiene como valor 1.73, sin importar las dimensiones de los lados del triángulo. Así, para cada ángulo se tiene su valor de *tangente* determinado. La clásica tabla de valores de razones trigonométricas es algo que se sugiere trabajar manualmente en esta etapa, ya que ayuda a afianzar el concepto de origen. Luego se podrá mostrar que tanto la calculadora como *GeoGebra* calculan estos valores para cualquier ángulo dado.

Se deberán definir desde la teoría algunos conceptos como «cateto opuesto» y «cateto adyacente», así como también las definiciones de razones trigonométricas «Seno» y «Coseno». Posteriormente se podrá avanzar hacia las razones trigonométricas inversas «Secante», «Cosecante» y «Cotangente». Por último se podrán definir las inversas de las razones, «arco», que permiten encontrar el valor del ángulo dado su razón.

Será muy útil para la resolución de nuevas situaciones problemáticas el uso de la calculadora, o en este caso, los comandos de *GeoGebra* para el cálculo de razones: «$sen()$», «$cos()$», «$tan()$», «$arcsen()$», «$arccos()$» y «$arctan()$».

Capítulo 4

Probabilidad y estadística

4.1. Estadística

4.1.1. Estadística descriptiva

Nombre: Calificaciones.

Resumen: A partir de un conjunto de resultados de calificaciones se introducirán los conceptos más básicos de la estadística descriptiva.

Objetivo: Definiciones y conceptos de estadística descriptiva, tablas y gráficas estadísticas, parámetros estadísticos básicos: Media, Mediana, Moda, cuartiles, deciles. Diagrama de caja.

Saberes: Gráficas en ejes cartesianos, operaciones aritméticas, intervalos.

Edad: 13 a 15 años.

Preparación Esta actividad requiere del uso de herramientas de graficación automática de datos estadísticos, por lo que se recomienda que el docente tenga un buen manejo de la herramienta de graficación automática y sus distintas configuraciones (Análisis de unavariable). Por otra parte, y debido a la complejidad del problema, se propone agrupar a los alumnos para resolver la actividad.

Planteo

Las siguientes son las calificaciones finales de un examen de la cátedra de matemática.

65	99	32	43	62	31	97	35	63	78
62	75	48	71	44	63	56	52	52	74
56	31	46	97	91	93	44	38	82	36
65	66	52	39	64	63	48	46	37	70
87	38	46	57	56	75	47	43	58	29
48	74	68	54	56	51	42	65	56	52
51	62	66	25	77	33	57	63	61	60
52	81	63	87	46	81	74	67	54	71

Cuadro 4.1: Tabla con las 80 calificaciones finales de matemática.

El docente necesita analizar los resultados y sacar algunas conclusiones.

1. ¿Cuál fue la calificación más alta? ¿y la más baja? ¿Cuál es el valor promedio entre todas las calificaciones?
2. Se aprueba con 60 puntos, ¿cuantos alumnos superaron el examen? Si se reprueba con menos de 40 puntos, ¿cuántos alumnos deben recursar la asignatura? Con puntaje entre 40 y 60 puntos es posible acceder a un recuperatorio, entonces ¿cuantos alumnos están en esa condición?

3. El docente quiere agrupar los resultados en bloques de 10 números, ordenados crecientemente, ¿qué cantidad de calificaciones quedan en cada bloque?, ¿puedes armar una tabla con esos datos?, ¿cómo se podrían graficar en un sistema de ejes cartesianos?

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema tiene como dato una tabla de 80 calificaciones, que no parece tener regularidad alguna. Las preguntas refieren a algún resultado puntual o agrupamiento condicionado.
2. *Pensar una estrategia*: Para poder responder las preguntas es necesario ordenar de alguna manera todos los datos. Una forma práctica puede ser copiando todos los valores deforma ordenada en la hoja de cálculo de *GeoGebra*. Una vez ordenados los datos se pueden comenzar a resolver las preguntas.
3. *Ejecutar el plan:* Ordenar la lista manualmente es lo que más tiempo lleva y donde más errores se pueden cometer, ya que son 80 datos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	65	99	32	43	62	31	97	35	63	78	
2	62	75	48	71	44	63	56	52	52	74	
3	56	31	46	97	91	93	44	38	82	36	
4	65	66	52	39	64	63	48	46	37	70	
5	87	38	46	57	56	75	47	43	58	29	
6	48	74	68	54	56	51	42	65	56	52	
7	51	62	66	25	77	33	57	63	61	60	
8	52	81	63	87	46	81	74	67	54	71	
9											
10	25	29	31	31	32	33	35	36	37	38	
11	38	39	42	43	43	44	44	46	46	46	
12	46	47	48	48	48	51	51	52	52	52	
13	52	52	54	54	56	56	56	56	56	57	
14	57	58	60	61	62	62	62	63	63	63	
15	63	63	64	65	65	65	66	66	67	68	
16	70	71	71	74	74	74	75	75	77	78	
17	81	81	82	87	87	91	93	97	97	99	
18											
19											
20											
21											

Figura 4.1: La tabla superior contiene los datos originales, y la tabla inferior es la misma tabla con los datos ordenados de menor a mayor.

1. *¿Cuál fue la calificación más alta? ¿Y la más baja?* Los alumnos no tendrán problema en encontrar estos valores solo por observación, 99 *y* 25. *¿Cuál es el valor promedio entre todas las calificaciones?* Se supone que el concepto de *promedio* o *media aritmética* es familiar para los alumnos. Se calcula sumando todos los valores (4699) y dividiéndolos por el total de calificaciones (80), lo que da por resultado $58,74$.
2. *Se aprueba con 60 puntos, ¿cuantos alumnos superaron el examen? Si se reprueba con menos de 40 puntos, ¿cuántos alumnos deben recursar la asignatura? Con puntaje entre 40 y 60 puntos es posible acceder a un recuperatorio, entonces ¿cuantos alumnos están en esa condición?* La búsqueda de estas respuestas puede resultar más compleja ya que deberán ordenar y segmentar los valores de alguna manera: 38 aprobaron el examen, 12 reprobaron y la diferencia entre estos con el total da por resultado 30 alumnos que pueden acceder a una instancia de recuperatorio.
3. *El docente quiere agrupar los resultados en bloques de la siguiente forma, quiere saber cuantas calificaciones hay entre el 0 y el 9, cuántas hay entre el 10 y el 19, cuántas entre el 20 y el 21,.... ¿Qué cantidad de calificaciones quedan en cada bloque?, ¿puedes armar una tabla con esos datos?, ¿cómo se podrían disponer estos grupos en una gráfica?*
Esta tarea se divide en tres partes, primero hay que agrupar los número sen intervalos, del 0 al 9 no hay ninguno, lo mismo para 10 a 19, de 20 a 29 hay 2, entre el 30 y el 39 hay 10,... Una vez obtenido esos datos, confeccionar una tabla es tarea sencilla:

0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-100
0	0	2	10	13	17	18	10	5	5

Cuadro 4.2: Tabla de intervalos y la cantidad de calificaciones que se cuentan adentro de ellos.

Respecto a las gráficas que surjan de esta tabla de frecuencias, probablemente sean muy similares a un histograma o gráfica de barras, tanto de forma horizontal como vertical.

4. *Verificar y repensar la solución*: Si se trabajó en grupos, es el momento de cotejar resultados entre ellos, de manera que puedan comparar las respuestas de cada grupo. Por ejemplo, se espera que todos los grupos hayan contestado correctamente la primer pregunta, y que salvo por alguna distracción el cálculo de la media no sea correcto. Se podrá intuir que entre 25 y 99, el $58,74$ es un valor «razonable» como promedio. En tanto que la segunda y tercer consulta que se hace, por su complejidad habrá que argumentar y mostrar el procedimiento que se realizó. ¿Cómo se contabilizó la cantidad de alumnos que aprobaron? ¿Se ha comprendido el agrupamiento en intervalos? ¿Se verifica que el conteo de cantidades de la tabla debe ser 80? ¿Cómo resultaron las gráficas de cada grupo? ¿Alguna gráfica posee ventaja para su interpretación ante otra?
   También en esta etapa de la resolución se puede repensar la tabla y suponer intervalos de longitud 5 en lugar de 10.

Validación

Haciendo uso de *GeoGebra* se utilizará el módulo *CAS* o la *Vista Algebraica* para validar las respuestas dadas. Lo primero que haremos es seleccionar las celdas donde cargamos las calificaciones y con el botón derecho crearemos una lista (se verá en la *Vista Algebraica* la lista «$l1$»).

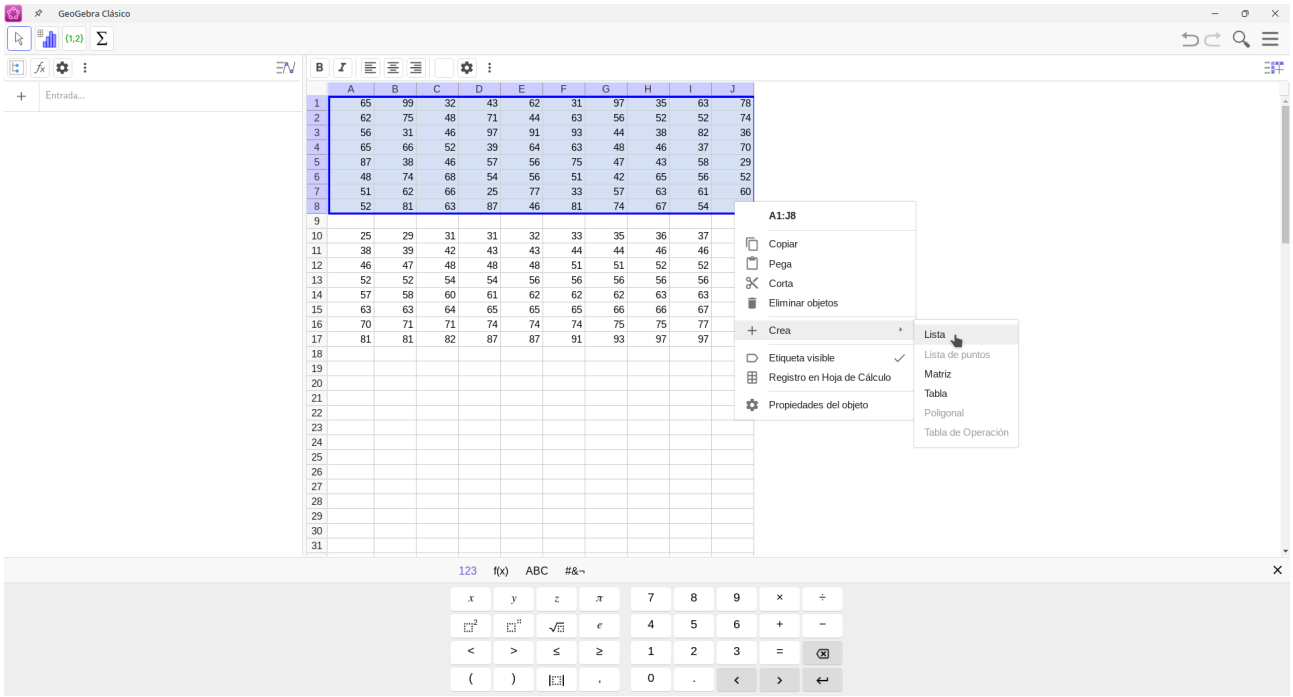


Figura 4.2: Lista de datos.

Luego le pediremos a *GeoGebra* que calcule el *máximo*, *mínimo* y *media*:

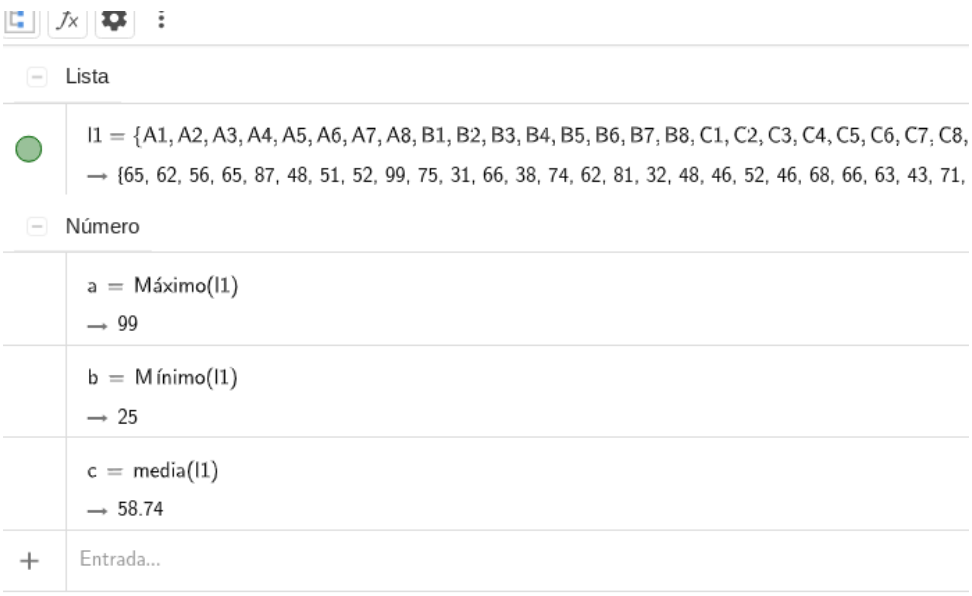


Figura 4.3: *Máximo*, *mínimo* y *media*.

Con esa lista se puede dar respuesta a la pregunta sobre cuántos alumnos aprobaron, cuantos desaprobaron y cuántos están en condición de recuperatorio:

Figura 4.4: Aprobados, desaprobados y con posibilidad de recuperatorio.

Nótese que la inecuación aplicada a una lista genera otra lista con la condición de verdadero y falso (1 y 0) para cada elemento de la lista de origen. La suma de todos los elementos de esta nueva lista equivale a contar cuantos «verdaderos» se obtuvieron.

GeoGebra posee varios comandos asociados a las listas, entre ellos «*Ordena*()», que toma el listado original y lo ordena de menor a mayor.

Para dar respuesta a la tercera pregunta realizaremos directamente el histograma seleccionando las 80 celdas correspondientes y mediante el botón «Análisis de una variable».

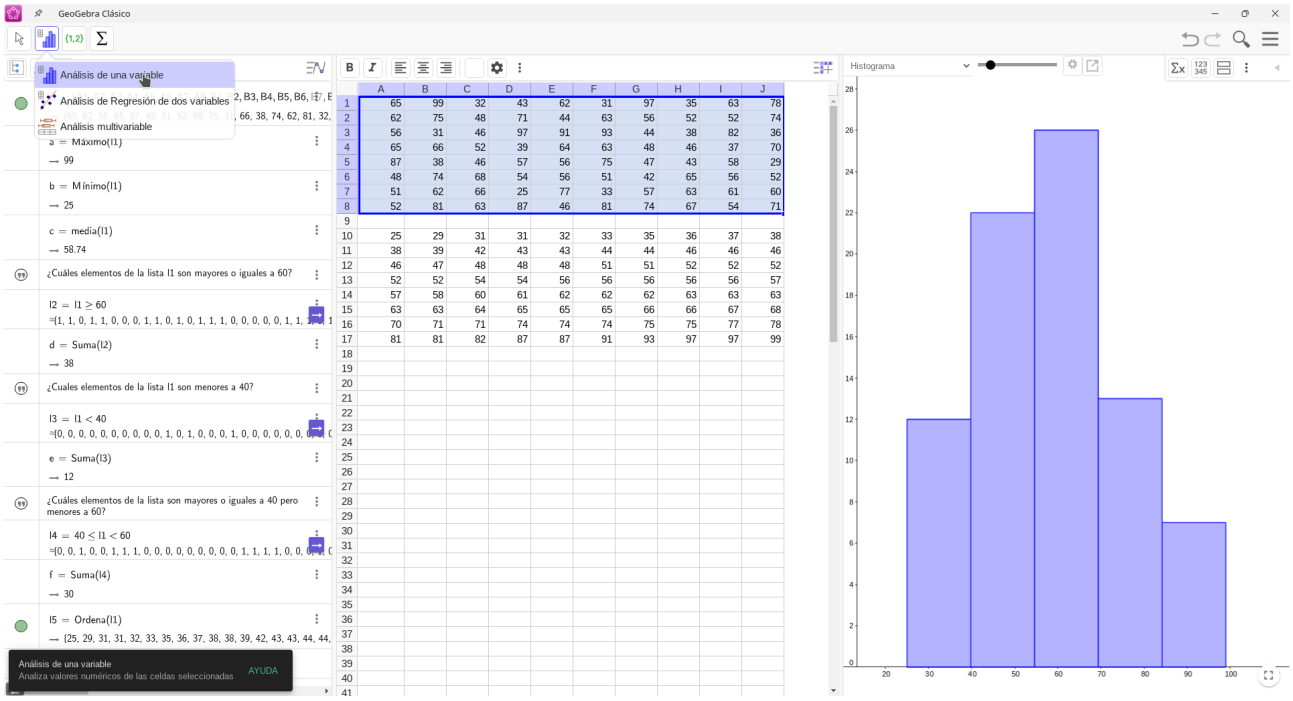


Figura 4.5: Análisis de una variable. Al accionar el botón, *GeoGebra* analiza los datos y los agrupa por defecto en 5 intervalos de igual «ancho».

El problema indicaba armar una tabla con intervalos de tamaño 10 unidades (0 a 9, 10 a 19, etc.). Esto se puede cambiar desde el botón de la rueda en la gráfica → «Definición manual de clases». Luego se elije el inicio y el ancho de intervalo.

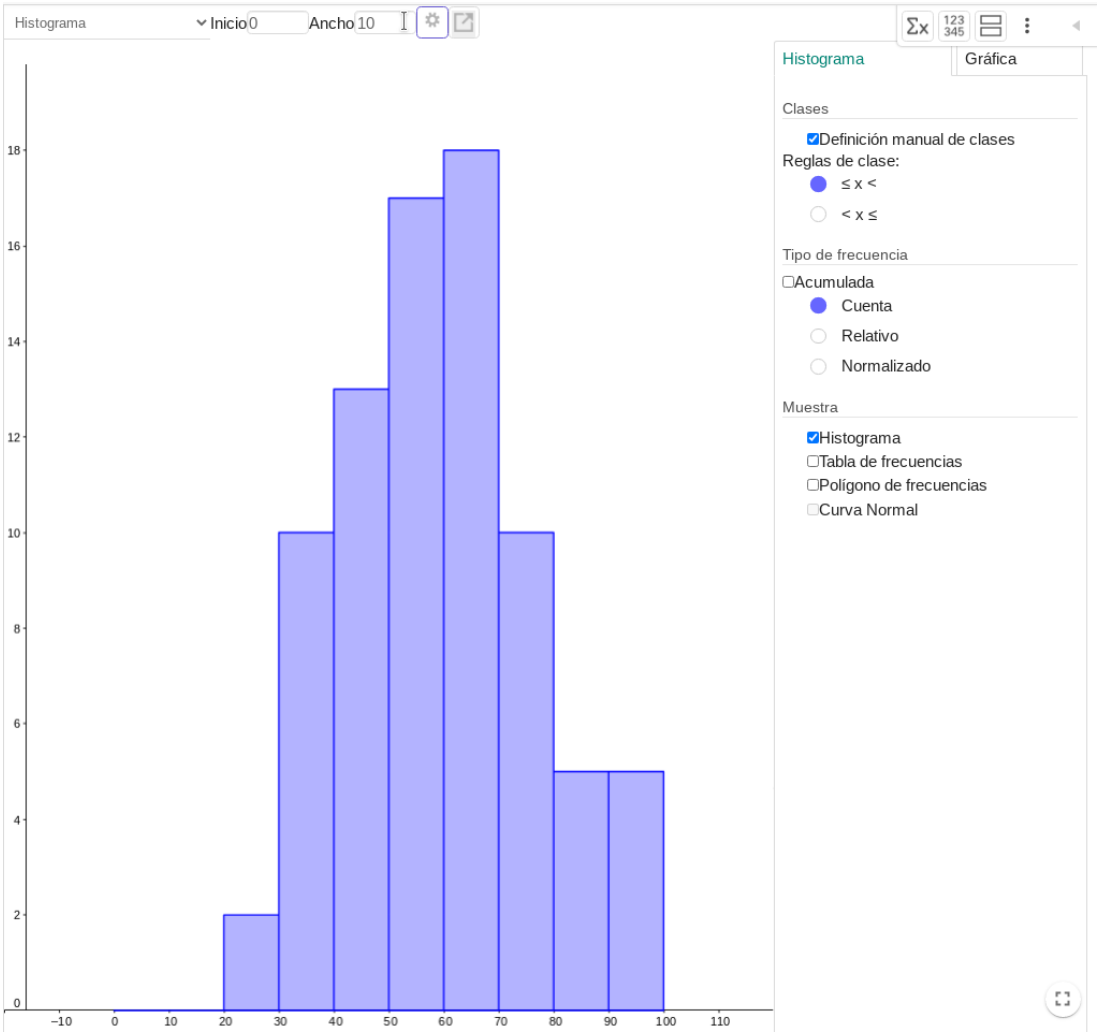


Figura 4.6: Histograma. Definición manual de clases. Se puede acceder a la tabla activando «Tabla de frecuencias» del panel lateral.

Respecto a la gráfica, se puede refinar más si se toma en cuenta como sugerencia que, dependiendo de la cantidad de datos, se recomienda que un histograma no tenga menos de 5 clases ni más de 15.

Formalización

Lo aprendido introduce nociones básicas de *Estadística descriptiva*, como los conceptos de *dato*, *frecuencia*, *rango de muestra*, *promedio* o *media*, *tablas de frecuencias absolutas* y *relativas*, *frecuencias acumuladas*, *gráficas de histograma*. Se podrá ampliar lo dado con nuevas definiciones que no se trabajaron en este problema, como dato *cualitativo* o *cuantitativo*, *gráficas de barras*, *mediana* y *moda*.

En *GeoGebra* se puede acceder a un resumen estadístico desde la misma gráfica de histograma con el botón $\sum_x$. Se recomienda explorar los comandos «*mediana*()», «*moda*()», «*ordena*()», «*cuartil*()» y «*clase*()».

Es fundamental que el docente promueva la comprensión de que la *mediana* y los *cuartiles* son medidas de posición que resultan especialmente útiles para el análisis de datos con distribuciones asimétricas o que contienen valores atípicos, a diferencia de la *media*, que es sensible a ellos.

4.2. Probabilidad

4.2.1. Probabilidad simple

Nombre: Ruleta.

Resumen: Mediante un concurso televisivo se construye el concepto de probabilidad simple, y para validarlo se utilizan conceptos geométricos como área y perímetro.

Objetivo: Construir el concepto de probabilidad simple.

Saberes: Fracciones, Razones, Área y Perímetro del Círculo.

Edad: 12 a 13 años.

Preparación La probabilidad simple resulta ser un concepto primitivo, sobre todo desde lo lúdico, por eso en la etapa de búsqueda de estrategias el docente podrá proponer que los alumnos jueguen con ruletas de cartón previamente preparadas. Esto permitirá a los alumnos hacerse de la experiencia necesaria para entender el juego y validar de alguna manera el término «chance» como «oportunidad», desde lo práctico.

Planteo

En un concurso de televisión hay tres ruletas gigantes, el participante tiene que elegir una de ellas para finalizar el juego. Al girar la ruleta elegida, si en el selector sale color rojo, pierde todos los premios que venía acumulando en el programa, si sale amarillo conserva lo que tiene y si sale verde duplica el premio.

La primera de las ruletas tiene tres sectores iguales, uno de cada color. La segunda tiene cuatro sectores, dos de ellos son amarillos y los otros son verde y rojo. La última tiene seis sectores de colores rojo y verde. Los colores están dispuestos de la siguiente manera:

Figura 4.7: Las tres ruletas que se ofrecen para elegir.

¿Cuál de las tres ruletas le conviene girar si quiere tener mayor chances de duplicar su premio?, ¿cuál de ellas elegiría si quisiera tener mayor chance de no perder su dinero?

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El concurso televisivo ofrece una última oportunidad al participante que ya viene acumulando premios. Puede duplicar su monto si al hacer girar una de las tres ruletas a elección sale color verde, conserva su dinero si sale amarillo y pierde todo si sale rojo. Una ruleta está dividida en tres sectores iguales, cada uno de un color diferente de los mencionados. La otra ruleta está dividida en cuatro sectores iguales, dos amarillos y los otros rojo y verde respectivamente. La tercera ruleta tiene solo dos colores, rojo y verde pintados de forma intercalada en seis sectores iguales.
   Sobre esas premisas hay que contestar, con fundamentación, cuál de las tres ruletas elegiría el participante si quiere duplicar su premio, y cuál elegiría si quiere minimizar el riesgo de perder todo su dinero.

2. *Pensar una estrategia*: Mediante algunas intervenciones puntuales el docente buscará la manera de reformular las preguntas del problema, para tratar de entender el problema desde otra perspectiva: ¿Todas las ruletas dan oportunidades de duplicar el dinero?, ¿y de perder el dinero?, ¿en alguna ruleta no hay *chances* de conservar el dinero acumulado?, ¿podemos asegurar el dinero con alguna ruleta?, ¿cómo podemos expresar matemáticamente las posibilidades o *chances* de ganar y perder?
   Estas preguntas deberán servir para generar un breve debate en común previo a la selección de estrategias, y no necesariamente se tendrá que esperar una respuesta concreta para cada una de ellas. Se sugiere agrupar a los alumnos, de a tres o cuatro, luego de esta etapa.
   El docente esperará que los alumnos reconozcan la palabra «chance» como una «oportunidad» de ganar (o posibilidad de empatar y perder). Para ello preguntará al alumnado sobre su significado y si alguna vez han escuchado esa palabra y en qué contexto. Luego podrá proponerles que simplifiquen el problema, pensando en qué pasaría si tuviesen una sola ruleta, pongamos por caso la primera: ¿Cómo se dan esas «chances» de ganar, empatar perder?
   Es probable que los alumnos opten por anotar numéricamente las cantidades como «porciones» de una torta, por ejemplo: «en la primera de las ruletas1 de las 3 partes es roja». El docente podrá proponerles luego pensar en la segunda de las ruletas, y en la tercera. Indagará, ¿son comparables las «porciones» entre sí?
   Siguiendo esta idea, los alumnos podrían pensar en las «chances» como la cantidad de porciones de un color respecto del total de porciones de la ruleta.
   El docente podrá además hacer notar el área disponible en cada ruleta para cada color o la longitud del arco de cada sector circular, que es donde debe caer el selector.

3. *Ejecutar el plan*: Dada la sencillez de la estrategia el docente motivará a que los alumnos avancen con ella, escribiendo numéricamente las «chances» como razones numéricas, ya que ha sido trabajado previamente en «operaciones gráficas con fracciones».
   De esta forma los alumnos podrán anotar:
   - Ruleta 1. 1/3 rojo, 1/3 amarillo, 1/3 verde. Por lo tanto en esta ruleta las «chances» de ganar, empatar o perder son las mismas (algo que probablemente sospechaban desde el inicio).
   - Ruleta 2. 1/4 rojo, 2/4 amarillos, 1/4 verde. Las «chances» de empatar son mayores que la de ganar o perder.
   - Ruleta 3. 3/6 rojo, 3/6 verde. No hay chances de empatar, pero son iguales las «chances» de ganar como de perder.
   Ahora, para responder la pregunta *¿Cuál de las tres ruletas le conviene girar si quiere tener mayor chances de duplicar su premio?* compararán estos datos entre sí. El docente podrá ayudarlos si tienen dudas sobre cómo comparar fracciones, convirtiéndolas a valores decimales. Una tabla será una buena herramienta para ello:

	Rojo	Amarillo	Verde
Ruleta 1	$1/3 = 0,\widehat{3}$	$1/3 = 0,\widehat{3}$	$1/3 = 0,\widehat{3}$
Ruleta 2	$1/4 = 0,25$	$2/4 = 0,5$	$1/4 = 0,25$
Ruleta 3	$3/6 = 0,5$	0	$3/6 = 0,5$

   La tabla, se podrá realizar con *GeoGebra*, con la ventaja de que los cálculos se realizan automáticamente.

	A	B	C	D	E
1		Rojo	Amarillo	Verde	Suma
2	Ruleta 1	0.33	0.33	0.33	1
3	Ruleta 2	0.25	0.5	0.25	1
4	Ruleta 3	0.5	0	0.5	1
5					

Figura 4.8: Se usó la «Hoja de cálculo» para armar la tabla de valores. Se agregó una última columna para corroborar $B + C + D$ suman el total, es decir 1.

   Para contestar la pregunta podrán argumentar que mientras más grande es el número observado, mayores «chances» se tienen de duplicar el dinero. Por lo tanto en la columna del «Verde» la tercera de las ruletas es la que nos brinda esa posibilidad $(0,5)$.
   La segunda pregunta es más compleja. Para responder *¿Cuál de ellas elegiría si quisiera tener mayor chance de no perder su dinero?*, podríamos pensar en la opción «Amarillo» ya que es la que nos da la

información sobre el «empate». Sin embargo la opción verde también implica «no perder dinero». Entonces habría que considerar estas dos opciones juntas, como una suma de «Amarillo + Verde»:
Ruleta 1:0, $\overset{\frown}{3} + 0, \overset{\frown}{3} = 0, \overset{\frown}{6}$
Ruleta 2: $0,5 + 0,25 = 0,75$
Ruleta 3: $0 + 0,5 = 0,5$
Esto nos dice que la Ruleta 2 es la que nos da mejores «chances» de no perder dinero (e incluso ganar). A este resultado también se puede llegar por diferencia, como veremos en la etapa de Validación.

4. *Verificar y repensar la solución*: El docente buscará que cada grupo pueda justificar sus respuestas. Y en el caso de que previamente hayan jugado a la ruleta podrán contrastar estos resultados con la experiencia de juego.
Se espera que en esta etapa se pongan de manifiesto algunas ideas intuitivas como:
- No es posible comparar directamente ruletas con distintos tamaños de «porciones».
- Se pueden anotar las «chances» como fracciones y comparar los resultados como números decimales.

Validación

La idea de «chance» como oportunidad de ganar versus oportunidades totales es precisamente el concepto formal al que se quiere llegar cuando se habla de probabilidad simple, y precisamente la primera de las preguntas hace referencia a eso. Por otra parte la segunda cuestión a resolver se puede entender como suma de «chances» independientes (o bien una diferencia del total menos el caso desfavorable).

Para lograr la validación el docente buscará argumentar mediante las estrategias del área y perímetro. Avanzará en la construcción de las tres ruletas con *GeoGebra*, donde cada grupo podrá trabajar en equipo siguiendo la explicación para obtener la primera de las ruletas y luego replicar la construcción de las otras dos: Para construir la primera de las ruletas comenzaremos abriendo *GeoGebra* con la apariencia de «Geometría», activaremos la grilla y luego graficaremos una circunferencia de radio igual a 1 con la herramienta «Circunferencia (centro, punto)»:

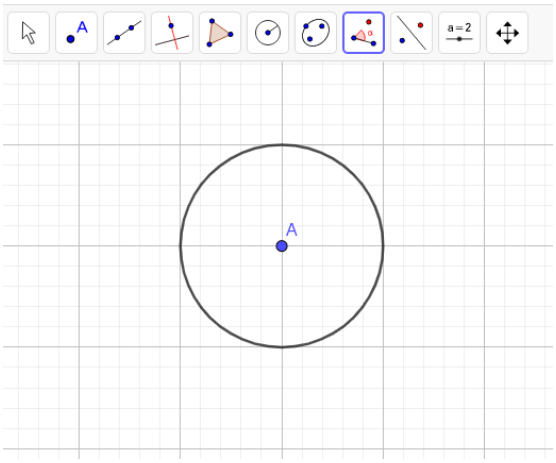


Figura 4.9: Para visualizar mejor el círculo se aplicó un poco de *zoom*.

Luego graficaremos los ángulos que dividen la ruleta en tres partes iguales. Como una vuelta completa corresponden a 360°, entonces cada sector mide $360°/3 = 120^\circ$.

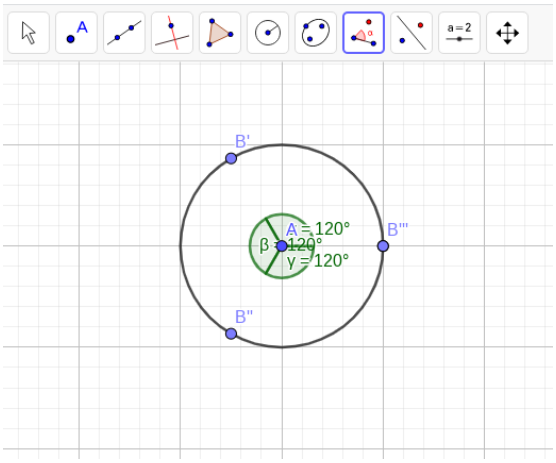


Figura 4.10: Para graficar el primero de los ángulos se tuvo que crear el punto B que coincide al final con B'''.

Por último graficaremos los sectores de colores y ocultamos los elementos gráficos que no necesitamos ver, como puntos y ángulos:

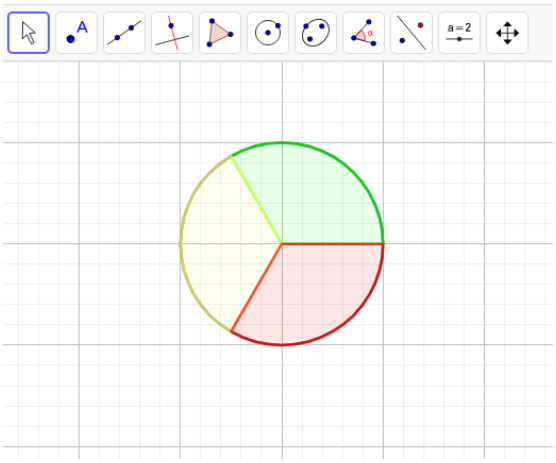


Figura 4.11: Ahora si, la primera de las ruletas está lista.

El docente les pedirá a los alumnos que repliquen el algoritmo de construcción para las otras dos ruletas, respetando la medida del radio, $r = 1$.

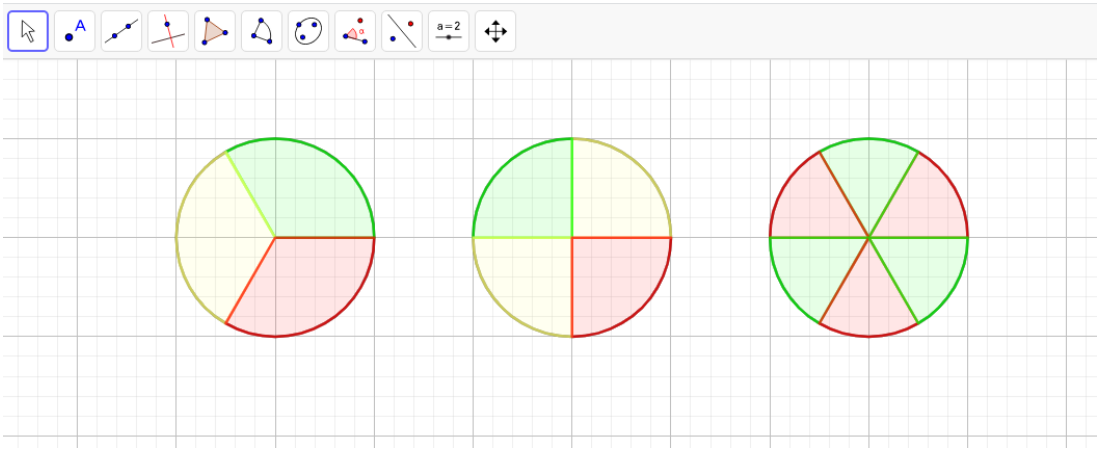


Figura 4.12: Al finalizar se debería ver algo similar a la imagen original del problema.

Una vez finalizadas las tres ruletas el docente les pedirá a los alumnos que activen la etiqueta de cada sector,

donde se muestra el valor de área.

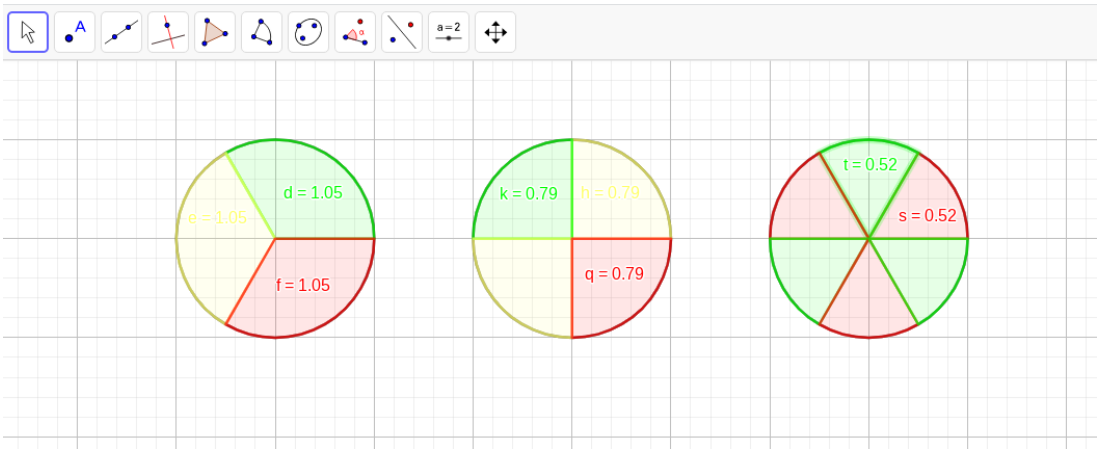


Figura 4.13: Para cada ruleta se puede observar el valor de área de los sectores de colores. Lógicamente para sectores congruentes, iguales valores de área.

Ahora, el docente les propondrá que dividan el área de cada sector por el área total del círculo, para obtener la razón de «parte sobre total del área»:

1. Ruleta 1: $\frac{1.05}{\pi \times 1^2} = 0,33...$
2. Ruleta 2: $\frac{0.79}{\pi \times 1^2} = 0,25...$
3. Ruleta 3: $\frac{0.52}{\pi \times 1^2} = 0,166...$

El docente indagará sobre esos valores, esperando que los alumnos puedan compararlos entre sí y relacionarlo con lo trabajado anteriormente en la tabla:

- En cada ruleta el valor de área de cada sector es el mismo, lo cual tiene sentido porque son partes iguales;
- Al comparar los sectores entre ruletas se observa que los valores son distintos, correspondiendo mayor área a sectores con mayor ángulo central;
- En la ruleta central el color amarillo supera a los otros dos porque se suman dos sectores;
- En la última ruleta pueden reorganizarse los sectores por colores, quedando dos mitades iguales de color verde y rojo.

Si en lugar de resaltar el área de cada sector de las ruletas medimos los arcos de cada uno tenemos una situación similar. Los alumnos podrán verificarlo haciéndolo ellos mismos:

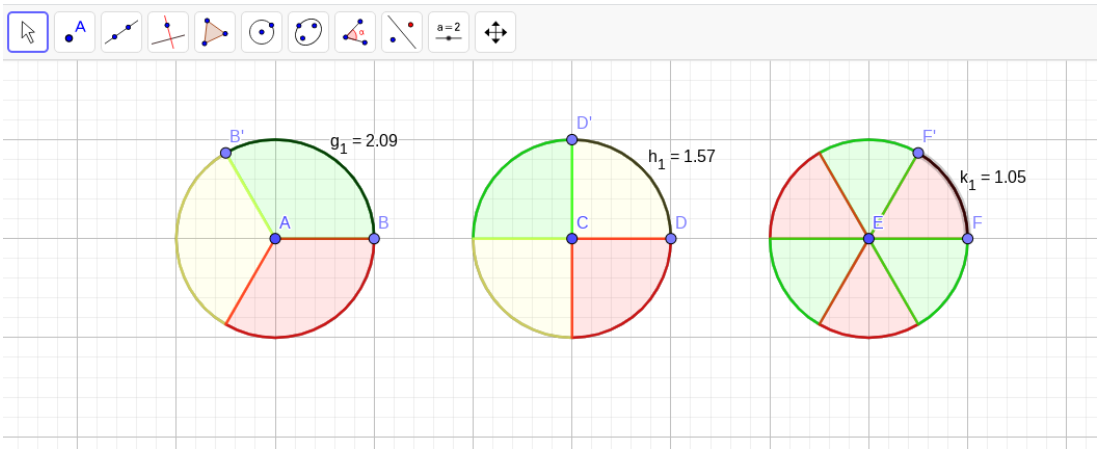


Figura 4.14: Como era de esperar las longitudes de arcos son distintas para cada ruleta, lo cual coincide con la argumentación previa.

Ahora les pedirá que hagan el cociente entre el arco de cada sector y el valor de la circunferencia completa:

1. Ruleta 1: $\frac{2.09}{2\times\pi\times1} = 0,33...$
2. Ruleta 2: $\frac{1.57}{2\times\pi\times1} = 0,25...$
3. Ruleta 3: $\frac{1.05}{2\times\pi\times1} = 0,166...$

Las conclusiones son las mismas, no importa cómo lo calculemos, se repiten las razones para cada sector. Por ejemplo, las chances de obtener verde en la primera de las ruletas es de 1 sobre 3 ($0,\widehat{3}$), es decir 1 caso favorable sobre los 3 casos posibles. Lo cual, si representamos como porcentaje representa el $33,\widehat{3}\,\%$.

Formalización

La «probabilidad simple» mide la posibilidad de que ocurra un único resultado en un experimento aleatorio, calculándose como la división entre el número de casos favorables y el número total de resultados posibles:
$P(A) = \frac{casos\,favorables}{casos\,posibles}$
La pregunta *¿Cuál de las tres ruletas le conviene si quiere tener mayor chances de duplicar su premio?* se puede traducir entonces como *¿cuál es la probabilidad de obtener verde en cada ruleta?*:

1. $P(verde) = \frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$
2. $P(verde) = \frac{1}{4} = 0,25$
3. $P(verde) = \frac{3}{6} = 0,5$

Por otra parte podemos traducir *¿Cuál de ellas elegiría si quisiera tener mayor chance de no perder su dinero?* como *¿cual es la probabilidad de que salga amarillo o verde?*. Como las probabilidades en este caso son independientes entre sí podemos calcularlo como una suma:

1. $P(verde) + P(amarillo) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,\widehat{6}$
2. $P(verde) + P(amarillo) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$
3. $P(verde) + P(amarillo) = \frac{3}{6} + 0 = \frac{1}{2} = 0,5$

O también por diferencia, siendo 1 la suma total de casos, es decir que salga cualquier color:

1. $1 - P(rojo) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,\widehat{6}$
2. $1 - P(rojo) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$
3. $1 - P(rojo) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$

Una vez introducida la definición de «probabilidad simple» el docente podrá proponer otros ejemplos, con cartas o lanzamientos de dados, y avanzar en construcciones más complejas que siguen en la temática.

4.2.2. Introducción al conteo

Nombre: Principio de conteo.

Resumen: El problema planteado, de autor desconocido, permite introducir el concepto del principio de conteo para el cálculo de casos posibles.

Objetivo: Principio de conteo, combinatoria.

Saberes: Múltiplos y divisores.

Edad: 12 a 14 años.

Preparación En esta actividad se utiliza la «planilla de cálculo» para organizar la lista de números que cumplen con las condiciones planteadas. Se utilizan colores para destacar algunos valores pero no se hacen cálculos en la planilla.

Planteo

Calcular cuántos son los números enteros positivos de cuatro dígitos que satisfacen simultáneamente que son múltiplos de 5, usan solamente los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5$ y por último que los dígitos pueden repetirse pero ningún número empieza con 0.

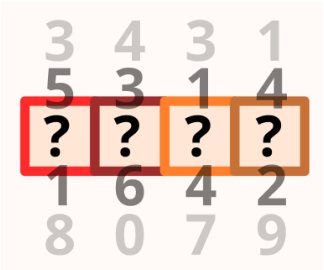


Figura 4.15: Calcula cuáles son los números que cumplen con las condiciones dadas.

Resolución

1. *Leer y entender el problema*: El problema trata de conocer cuántos números cumplen con ciertas condiciones, aunque no se pide la lista de esos números, puede intuirse que no son pocos. Los números tienen 4 dígitos y son múltiplos de 5, o sea que deben terminar en 5 o 0. También se descarta la utilización de los números $6, 7, 8$ y 9. El 1000 parece ser el primer número que verifica todas las condiciones.

2. *Pensar una estrategia*: La primer estrategia que se nos viene en mente es intentar una lista de posibles candidatos, es decir resolver el problema por agotamiento, pero como se intuye del enunciado puede que no sea muy práctico ir anotando y descartando números. La alternativa a esto es elaborar una criba simplificada de los primeros 100 números (aunque se sabe que la lista comienza en el 1000) donde se marquen los casos posibles y los casos descartados, sabiendo que este patrón se repite en cada centena.

3. *Ejecutar el plan*: Para resolver el problema utilizaremos la *Vista de Hoja de Cálculo* de *GeoGebra* (se activa desde el menú → *Vistas*). En la hoja ingresaremos los números del 0 al 9 en forma horizontal en las casillas $A1$ al $J1$ correspondientemente. Luego en $A2$ ingresaremos la fórmula «$= A1 + 10$»:

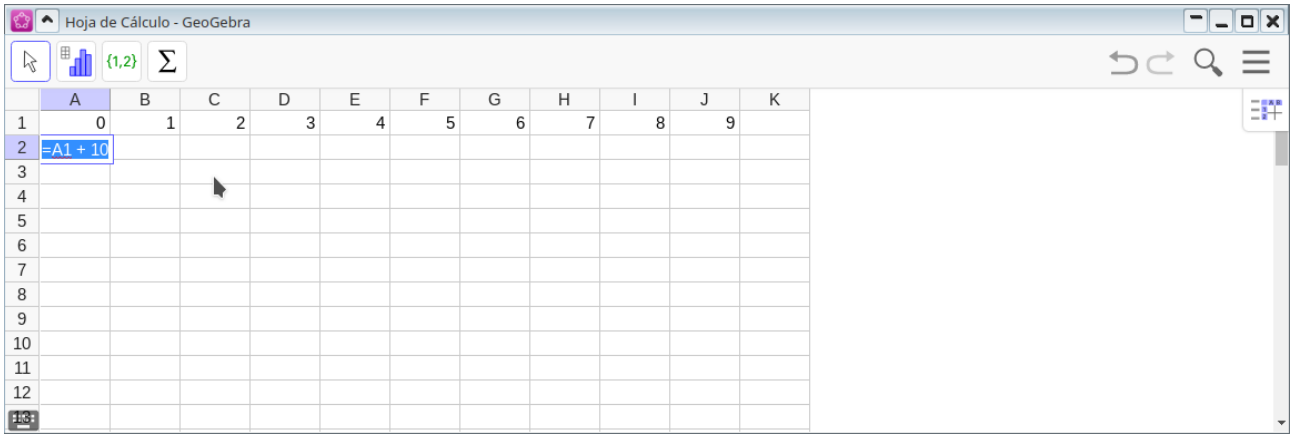


Figura 4.16: La criba comienza en $A1$ con el número 0.

A continuación copiaremos el contenido de $A2$ en los casilleros $B2$ hasta el $J2$, y por último copiaremos toda esa fila de $A2$ a $J2$ en las siguientes inferiores $A3 - J3$... hasta $A10 - J10$:

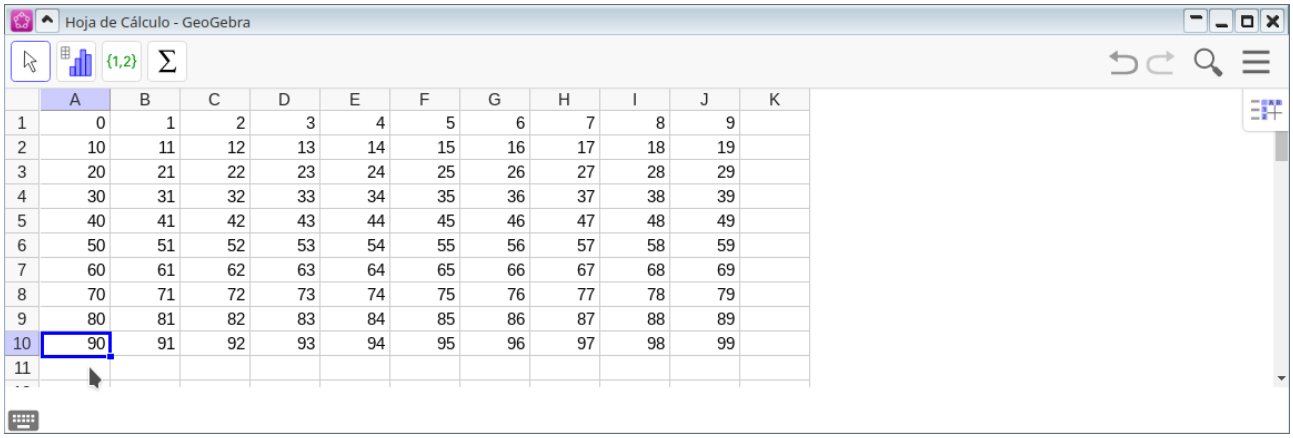


Figura 4.17: La criba contiene 100 números, del 0 al 99.

Ahora es necesario destacar los casos posibles. La primera condición determina que tienen que terminar en 5 o 0:

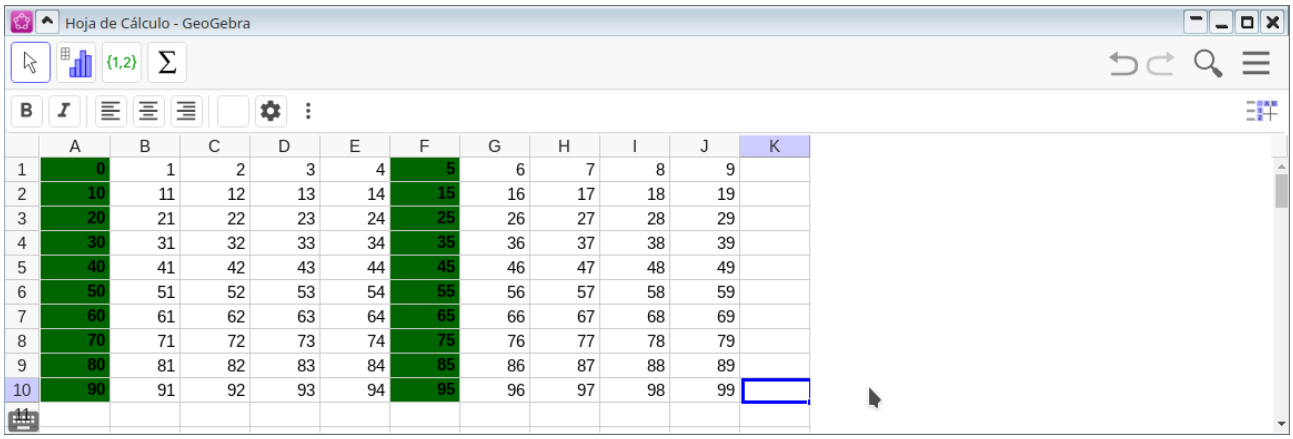
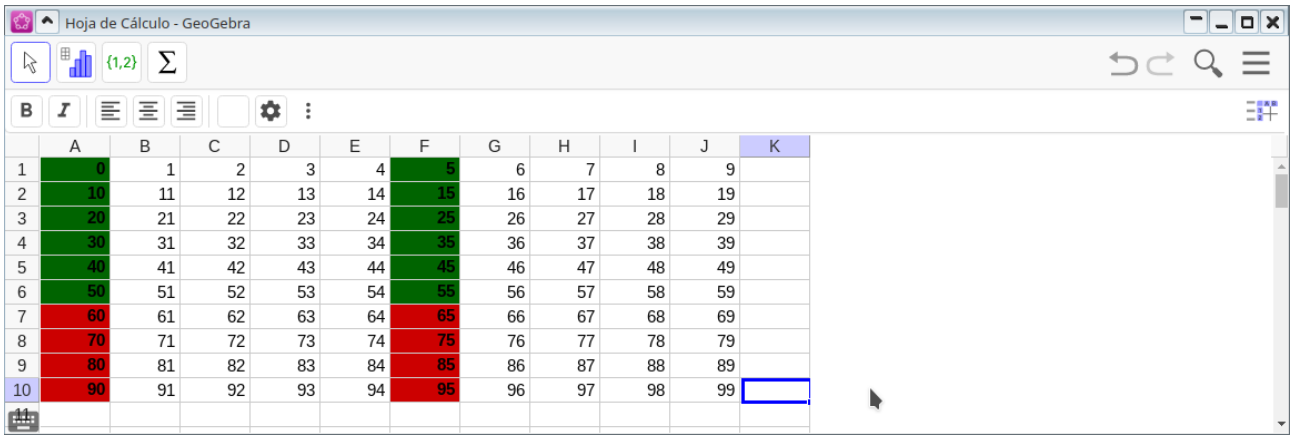


Figura 4.18: Las columnas en verde terminan en 5 o 0.

Pero de la selección anterior hay que descartar las que tienen dígitos $6, 7, 8$ y 9:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
3	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
4	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
5	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
6	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
7	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
8	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	
9	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	
10	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	

Figura 4.19: Las columnas en rojo se descartan porque no verifican las condiciones del problema.

Como se ha dicho, este patrón se repite cada 100 números, comenzando desde el $1000, 1005, 1010, ..., 1055$, lo que nos da 12 números entre el 1000 y el 1099. Y ello nos lleva a extender el razonamiento entre el caso $1100 - 1199$, $1200 - 1299$, $1300 - 1399$, $1400 - 1499$ y$1500 - 1599$, parando allí ya que el 6 o mayor no se puede usar. Entonces, de esta manera contabilizamos 12 en cada una de las 6 centenas, logrando un total de 72. Siguiendo con el razonamiento contaremos 5 veces 72 en $1000, 2000, 3000, 4000$ y 5000 lo que da un total de 360 números como respuesta final.

4. *Verificar y repensar la solución*: Para verificar se puede armar un listado parcial, incompleto, de forma que se puedan verificar todas las condiciones del problema.

Validación

En el caso particular de este problema, se tienen 6 dígitos $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ para usar en 4 posiciones diferentes $XXXX$, pero con condicionamientos:

1. En la primer posición solo pueden usarse 5 dígitos $(1, 2, 3, 4, 5)$
2. En la segunda posición pueden usarse 6 dígitos $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$
3. En la tercera posición pueden usarse 6 dígitos $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$
4. En la cuarta posición pueden usarse 2 dígitos $(0, 5)$

En resumen, por cada uno de los primeros 5 dígitos tenemos 6 posibilidades de la segunda posición, lo cual da 30 distintos comienzos para las dos primeras posiciones. Luego, para cada uno de ellos tenemos 6 posibilidades, dando 180 números distintos para las primeras tres posiciones. Por último, 2 posibilidades por cada una de esas 180 da como resultado final 360 números distintos que cumplen con todas las condiciones: $5 \times 6 \times 6 \times 2 = 360$.

Formalización

Generalizando el *principio* se tiene que «Si hay *«p»* formas de hacer una cosa y *«q»* formas para una segunda cosa entonces hay $p \times q$ de hacer ambas cosas».

Por asociación, para este caso en particular hay $p \times q \times r \times s$ formas de hacer las cuatro cosas.

El docente podrá, luego de esta generalización, proponer nuevos casos de conteo para que puedan aplicar.

Bibliografía

[1] Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas (D. Fregona, Trad.). Libros del Zorzal. (ISBN 978-987-599-035-7)

[2] Parra, C., & Saiz, I. (Eds.). (1994). Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones. Paidós. (ISBN 950-12-2112-1)

[3] Zysman, A., & Paulozzo, M. (Coords.). (2006). Diseño curricular para la educación secundaria: 1º y 2º año ESB (2a ed.). Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (ISBN 987-1266-13-8)

[4] Bracchi, C. (Coord.). (2008). Diseño curricular para la educación secundaria 3º año (1a ed.). Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (ISBN 978-987-1266-61-6)

[5] Bracchi, C. (Coord.). (2010). Diseño curricular para la educación secundaria ciclo superior ES4: Matemática (1a ed.). Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (ISBN 978-987-1266-95-1)

[6] Bracchi, C., & Paulozzo, M. (Coords.). (2011). Diseño curricular para la educación secundaria 5º año: Matemática - Ciclo superior (1a ed.). Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (ISBN 978-987-676-022-5)

[7] Bracchi, C., & Paulozzo, M. (Coords.). (2011). Diseño curricular para la educación secundaria 6º año: Matemática - Ciclo superior (1a ed.). Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (ISBN 978-987-676-049-2)

[8] Enlaces

- Sitio oficial de *GeoGebra* https://www.geogebra.org/
- Recursos de *GeoGebra* https://www.geogebra.org/materials
- Blog personal del autor «Matematicx» https://matematicx.wordpress.com/
- Diseños Curriculares de Matemática (Provincia de Buenos Aires) https://abc.gob.ar/secretarias/areas/subsecretaria-de-educacion/educacion-secundaria/educacion-secundaria/disenos-curriculares